FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1916

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS III.

AD ANNVM cIↄ Iↄcc xxviii.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cIↄ Iↄcc xxxii.

16 70253 april 28

INDEX COMMENTARIORVM

In CLASSE
MATHEMATICA.

Iac. Hermanni Noua Ratio deducendi Regulam iam paſſim traditam pro Centro oſcillationis penduli cuiusque compoſiti. pag. 1.

Ioh. Bernoulli Meditationes de chordis vibrantibus, cum ponduſculis aequali interuallo a ſe inuicem diſſitis. p. 13.

Frid. Chriſtoph. Maier de Arithmetica Figurata, eiusque vſibus aliquot. p. 28.

Eiusdem PropoſitionesCyclometricae aliquot.p.53.

Dan. Bernoulli Methodus vniuerſalis determinandae Curuaturae fili a potentiis extenſi. p. 62.

Leonh. Euleri Solutio de inuenienda Curua, quam format Lamina vtcunque Elaſtica et grauis. p. 70.

Dan. Bernoulli Obſeruationes de ſeriebus recurrentibus. p. 85.

Georg. Wolffg. Krafft Conſideratio Curuarum quarundam altioris generis, quae facile deſcribi poſſunt. p. 101.

Leonh. Euler de Linea breuiſſima in ſuperficie quacunque duo quaelibet puncta iungente. p. 110.

Eiusdem Noua Methodus innumerabiles Aequationes Differentiales ſecundi gradus reducendi ad primum gradum. p. 124.

Ioh. Georg. Leutmanni Explicatio Inuenti Hydroſtatici de pondere argenti cupro mixti inueſtigando. p. 138.

* *Ioh.*

Ioh. Georg. Leutmann de Sulcis cochleatis ad datam diſtantiam tubis ſclopetorum recte inducendis. p. 156.

Chriſtianus Goldbach de Terminis Generalibus ſerierum. p. 164.

In CLASSE

PHYSICA.

Ioh. Georg. Duvernoi Monſtrum Caſanenſe p. 177.

Eiusdem Monſtrum Petropolitanum. p. 188.

Georg. Bernh. Bülffingeri Diſſertatio de Thermometris, et eorum emendatione p. 196.

Dan. Bernoulli Diſſertationes de Actione fluidorum in corpora ſolida, et motu ſolidorum in fluidis continuatio. p. 214.

Georg. Bernh. Bülffinger, An aer ſanguini pulmones transeunti miſceatur. p. 230.

Eiusdem, de effectu caloris vel frigoris ſubitanei in expanſionem vel contractionem vitrorum. p. 242.

Ioh. Georg. Gmelin de Radiis articulatis lapideis. p. 246

Ioh. Chriſt. Buxbaum, de propagatione Fungorum per radices. p. 264.

Eiusdem de Periclymeno humili Norwegico. p. 268.

Eiusdem Obſeruationes circa quasdam Plantas Ingricas. p. 270.

Obſeruationes Anatomicae. p. 274.

Disquiſitiones Phyſicae de Tubulis capillaribus a *Iacobo Iurino* ad Academiam transmiſſae, vna cum notis *Georg. Bernh. Bülffingeri*. p. 281.

In

In CLASSE
HISTORICA.

Theoph. Sigſr. Bayeri Chronologia Scythica. pag. 295.

Eiusdem Memoriae Scythicae ad Alexandrum M. p. 351.

Eiusdem Elementa Litteraturae Brahmanicae, Tangutanae, Mungalicae. p. 389.

***

Obſeruationes Aſtronomicae *Ioſephi Nicolai De L'Isle* p. 425.

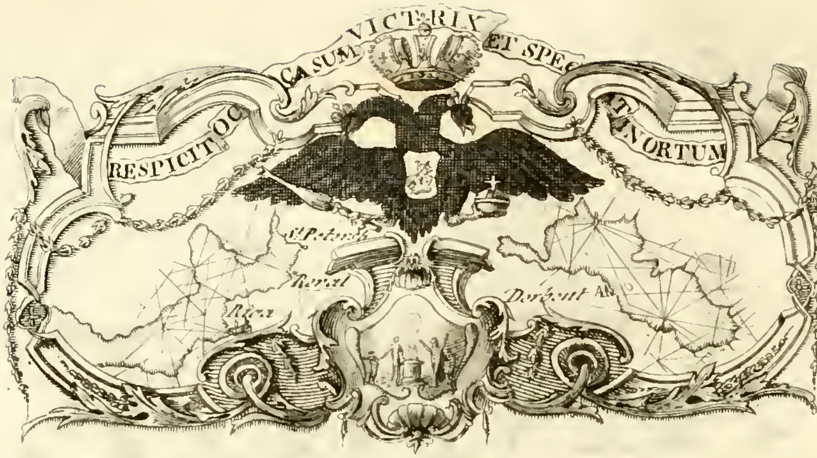
\- - - *Ludouici De L'Isle de la Croyere.* p. 433.

CLASSIS PRIMA

continens

MATHEMATICA

ANNAE
RVSSORVM
IMPERATRICI



VT qualiscunque induſtriae noſtrae ſpecimina quae hoc tertio volumine comprehenduntur, ante quam in publicum prodirent, TIBI, AVGVSTA, offerremus, et ſi opusculorum prohibebat exilitas, incredibilis tuae erga collegium noſtrum benigni-

nignitatis fiducia effecit; quando quidem *Petri I. Imperatoris* Patrui tui acta confirmas, eiusque immortalia in Ruſſiam merita nouis beneficiis quotidie auges atque illuſtras, hanc vero, quam illius ſapientia fundauit, Academiam, ſingulari clementia ſic complecteris vt artes ingenuas, nunc praeſertim, quando flos nobilitatis et iuuentutis omni genere doctrinae et exercitii militaris praeclare inſtitutus in ſpem patriae tuendae ornandaeque adoleſcit, nusquam cultas felicius, nusquam liberalius acceptas quam tuo ſub imperio exiſtimemus.

Hac felicitate temporum dum TE ſalua fruimur, dum placidiſſimam pacem, qua nihil eſt humano generi optabilius, TE imperante non ſolum in Europa ſeruatam, ſed nuper etiam tuis auſpiciis in Perſarum finibus reſtitutam Ruſſiae gratulamur, ingratiſſimi mortalium, tuoque beneficio indigni ſimus, niſi

niſi eius magnitudinem ſpectemus meritisque laudibus eo ardentius extollamus, quo certior nobis ſpes eſt, hanc diuinitus conceſſam tranquillitatem TE incolumi conſtantem ac perpetuam fore, poſtquam finitimos populos vel foederum religio, vel metus armorum tuorum et certiſſimae calamitatis ſuae, ſi fidem datam violarent, in officio continet.

Nos interea, quae muneris noſtri ratio poſtulat, alacriter exſequemur, tuaque auctoritate et ſumma beneuolentia freti operam dabimus, vt Imperio Ruſſico tot rebus terra marique proſpere geſtis inclito atque ad faſtigium gloriae tua prudentia euecto non minimum decus etiam a litterarum et humanitatis ſtudiis accedat.

Petropoli
Cal. Sept.
CIↃ IↃ CC XXXII.

Academicorum nomine
Chriſtianus Goldbach.

NOVA RATIO
DEDVCENDI REGVLAM IAM PASSIM TRADITAM
PRO CENTRO OSCILLATIONIS PENDVLI CVIVSque COMPOSITI,
PETITA EX THEORIA MOTVS GRAVIVM IN ARCVBVS CIRCVLARIBVS.

Autore
Iacobo Hermanno.

M. Febr. 1728.

POſteaquam primum Hugenius in tertia Parte Horologii Oſcillatorii, poſtea vero et ex interuallo Viri Celeberrimi Fratres Bernoullii, Iacobus et Ioannes, quiſque methodum ſuam peculiarem inueniendi centrum oſcillationis in pendulis compoſitis dederunt, Geometris actum agere videbor, quod de eodem hoc argumento nunc aliquid iterum promere mecum conſtitui, et quidem diu poſtquam ipſe quoque in Phoronomia de eo iam fuſius egi, ſed alio fundamento innixus Sed ſi deducendi modus nouus eſt, quo regulam ſic

ſatis tritam ex ſuis principiis genuinis eruere docebo, non puto id mihi vitio verſum iri, quod eum hoc loco publicare ſuſtinuerim.

1. Sit ergo pendulum CPQ ponderibus quotcunque P, Q, &c. compoſitum: in ſchemate quidem non niſi duo pondera P, Q, expreſſa ſunt, ſed quotcunque alia in hiſce duobus ſubintelligi debent, quorum centra vel in eodem plano exiſtant, aut in planis diuerſis; conficiat hoc pendulum oſcillationes ſuas circa axem per C tranſeuntem, quem plano huius chartae perpendiculariter inſiſtere. Ponamus inſuper punctum M denotare centrum grauitatis omnium partium, quibus pendulum componitur, hancque ipſam litteram deſignare ſummam
Fig. 1. omnium ponderum ipſius penduli. Recta CMN quam in plano huius chartae exiſtere fingo, dicatur *axis* penduli compoſiti. Quod ſi praeterea CN ſit longitudo penduli ſimplicis compoſito *tautochroni*, oſcillationes ſuas eodem tempore, quo pendulum compoſitum abſoluentis, ducatur per axem oſcillationis C linea horizontalis CY, et ex M et N perpendiculares in eam demittantur MD, NY.

2. His praemiſſis, liquet, quod lapſu accelerato axis penduli CM, ex ſitu horizontali CY in CM, ſingulae partes penduli P, Q, &c. et commune ipſarum centrum grauitatis M acquiſiuiſſe debeant celeritates aliquas, quas p, q, &c. et u, vocabimus, quae propter connexionem partium penduli, diſtantiis CP, CQ, et CM ab axe oſcillationis C, proportionales erunt. Hae vero CP, CQ &c. in vnum idemque punctum ſuſpenſionis conuergent, ſi

cen-

centra ponduſculorum P, Q, &c. in vno eodemque verticali plano CYN exſtiterint, ſed ſi ponduſcula haec extra dictum planum fuerint, tunc ſaltem ipſae CP, CQ, &c. eorum diſtantias ab axe oſcillationis indicabunt, ſed non in vno eodemque plano exiſtent.

3. Vt *vim accelerantem* penduli inuenire poſſimus, cogitandum omnes eius partes componentes P, Q, &c. velut in vnum corpus in centro earum communi grauitatis M collectas eſſe, exponet enim maſſa M, omnibus partibus P, Q, &c. aequalis, ducta in diſtantiam eius MC ab axe oſcillationis, quam diſtantiam deinceps a nominabimus, exponet inquam aM ſolicitationem accelerantem in directione DM horizonti perpendiculari. Ductis vero per terminum inferiorem arculi Mm tempuſculo dt deſcripti, $m\mu$ parallela MD, et per M altera Mμ parallela CY, erit aM ſolicitatio grauitatis in directione DM, ad ſolicitationem accelerantem in directione arculi Mm, vel tangentis eius in M, vt Mm ad $m\mu$. Quare vocando verticalem MD$=x$, eius elementum $m\mu=dx$, et arculum M$m=ds$, inuenietur ſolicitatio grauitatis tangentialis vel arcualis in M$=\frac{aMdx}{ds}$.

4. Effectus vero, quem ſolicitatio iſta temporis elemento dt producit, eſt ſumma incrementorum motus in ſingulis penduli partibus P, Q, &c. productorum, hoc eſt, P.CP.dp+Q.CQ.dq+&c. nam p, q, &c. denotant celeritates iam deſcenſu acquiſitas partibus P, Q, &c. et dp, dq &c. earum e-

 lemen-

lementa. Iam quia ſolicitatio agens ducta in tempus, quo effectum ſuum praeſtat, aequipollet effectui producto, ideo naſcetur aequatio $\frac{aMdxdt}{ds} = P.CP.dp + Q.CQ.dq +$ &c.

5. Cum vero celeritas actualis in arculo Mm acquiſita (§. 2.) ſit $= u$, et tempuſculum, quo percurritur $= dt$, erit $dt = \frac{ds}{u}$, quod in praecedenti aequatione $\frac{aMdxdt}{ds} = P.CP.dp + Q.CQ.dq +$ &c. ſuffectum, praebet $\frac{aMdx}{u} = P.CP.dp + Q.CQ.dq +$ &c. vel $aMdx = P.CP.udp + Q.CQ.udq +$ &c. Verum (§. 2.) habetur etiam $CM(a) : CP :: u:p$, et ductis extremis et mediis in ſe inuicem, inuenietur $CP.u = ap$; et ſimili argumento fit in reliquis $CQ.u = aq$, &c. quibus in praecedenti aequatione ſuffectis prouenit aequatio, quae diuiſa per a, praebet $Mdx = Ppdp + Qqdq +$ &c. Quare ſumtis integralibus fit $2Mx = Ppp + Qqq +$ &c.

6. Quia vero (§. 5.) $p = \frac{CP.u}{a}$, $q = \frac{CQ.u}{a}$, &c. aequatio praecedens abit in hanc aliam $2Mx = (P.CP^2 + Q.CQ^2 + \text{\&c.})\frac{uu}{aa}$. ad abbreuiandum vero, pro ſumma indefinita $P.CP^2 + Q.CQ^2 +$ &c., ſcribam deinceps $\int P.CP^2$. eſt ergo $2Mx = \frac{uu\int P.CP^2}{aa}$, quare $uu = \frac{2aaMx}{\int P.CP^2}$. Breuitatis cauſſa pro $\frac{M}{\int P.CP^2}$ ſcribatur R, eritque $u = a\sqrt{2Rx}$.

7. Propter triangula ſimilia vero MCD et $Mm\mu$, reperitur $Mm = ds = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ et $dt (= \frac{ds}{u}) = \frac{1}{\sqrt{2R}} \times \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$)

$\times \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$. Adeoque tempus deſcenſus penduli compoſiti ex CY in CM, eſt $= \frac{1}{\sqrt{2R}} \int \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$.

8. Quod ſi iam CN ſit longitudo penduli ſimplicis tautochroni, quae dicatur $= l$, erit tempus deſcenſus eius ex CY in CN $= \int \frac{ldy}{\sqrt{(2lly - 2y^3)}}$, exiſtente NY $= y$. Sed propter triangula ſimilia CMD et CNY, fit $y = \frac{lx}{a}$, quare $\int \frac{ldy}{\sqrt{(2lly - 2y^3)}} = \sqrt{\frac{al}{2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$. Propter Tautochroniſmum vero penduli ſimplicis et compoſiti, fit $\sqrt{\frac{al}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}} = \frac{1}{\sqrt{2R}} \int \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$, itaque diuiſa hac aequatione per $\int \frac{dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$, inuenitur $\sqrt{\frac{al}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2R}}$; atque adeo $l = \frac{1}{aR}$, atqui R (*hyp.*) $= \frac{M}{\int P.CP^2}$ ergo $l \left(= \frac{1}{aR}\right) = \frac{\int P.CP^2}{M.CM}$. Et haec eſt ipſiſſima regula, quam Hugenius propoſitione quinta in tractatu de centro oſcillationis dedit, ſed ex alio fundamento deriuauit.

9. Principium enim, cui vir ſummus ſuam theoriam inaedificauit, hoc eſt, quod commune centrum grauitatis omnium partium penduli compoſiti ad eandem altitudinem aſcendere debeat, ſi ſolutis vinculis vnaquaeque pars motum, quem deſcendendo acquiſiuerat, verticaliter in altum conuertat, ex qua ceciderat, dum omnes eius partes adhuc connexae eſſent. Hoc principium vero aliud non eſt, quam principium conſeruationis virium, quod etſi ſupra omnem obiectionum vim poſitum

exiſtimo, a nonnullis in dubium vocabatur. Illud vero, quatenus pendulis applicatur, ex praecedentibus haud difficulter demonſtratur.

10. Ponamus enim pendulum CPQ deſcendiſſe ex ſitu CY in ſitum CM, et hoc deſcenſu pondus P acquiſiuiſſe celeritatem, qua a reliquis auulſum in verticali PY ſurſum conuertens pertingere poſſit in S, alterum Q, in verticali QZ, vsque in T, et ſic de reliquis, et poſtquam ad S, T, &c. peruenerunt ſit commune ipſorum centrum grauitatis in V, adeoque (§. 45.) *Phor.* M. MV=P. PS+Q. QT+&c. adeoque 2M. MV=2P. PS+2 Q. QT+&c. Sunt vero (§. 150. *Phor.*) $pp=2PS$, $qq=2QT$, &c. Quare (§. 5. hui.) $2Mx=2M.DM=2P.SP+2Q.TQ=2M.VM$, adeoque MV=DM. Quod erat &c.

Fig. 2.

11. Nunc paucis quoque uſus regulae $l=\frac{\int P.CP^2}{M.CM}$ ſupra (§. 8. hui.) inuentae, eſt oſtendendus. Figurae oſcillantes ſunt vel *lineae*, vel *ſuperſicies*, vel *ſolida*. Si ſunt lineae, erunt rectae vel curuae, rectas hoc loco mittamus ſolas curuas contemplaturi, et quidem eas tantum, quae ſunt in eodem plano. Huiusmodi curuae vero gemino ſenſu circa axem oſcillationis agitari poſſunt, in *Planum* vel in *Latus*. Curua in planum oſcillatur, cum planum, in quo eſt curua et axis oſcillationis, ſunt ſemper in eodem plano, quod etiam de figuris planis in planum agitatis, eſt intelligendum. In latus vero linea curua vel figura plana oſcillari dicitur cum planum, in quo

quo eſt curua vel ſuperficies agitata axi oſcillationis rectum eſt.

12. Sit ergo curua circa axem OO oſcillans BAB, eius axis ſeu axis penduli CD, et agitetur primum curua in planum: vt CD perpendicularis eſt ad OO ita ordinatim applicata BB eidem parallela. Fig. 3.

Dicantur nunc $CA = m$, $AD = x$ $BD = y$, elementum curuae $Bb = ds$. Omnia pondera huius penduli compoſiti ſunt elementa curuae $Bb = ds$, et diſtantiae eorum ab axe oſcillationis OO ſunt $CD = m + x$, quando curua BAA vel eius planum, in planum agitatur. In formula generali $l = \frac{\int P.CP^2}{M.CM}$, denominator M.CM ſignificat ſummam momentorum omnium $Bb = ds$, ſeu $CD.Bb = \int (m + x)\, ds$ et numerator $\int P.CP^2 = \int (mm + 2mx + xx) ds$ adeoque $l \left(= \frac{\int P.CP^2}{M.CM}\right) = \frac{\int (mm + 2mx + xx) ds}{\int (m + x) ds}$.

Sed ſi axis oſcillationis fuiſſet in 2O2O, ita vt punctum D cadat inter 2C et A, in praecedenti formula tantum mutari debet ſignum ipſius m, vbi haec litera eſt vnius dimenſionis, et inuenietur $l = \frac{\int (mm - 2mx + xx) ds}{\int (-m + x) ds} = \frac{-\int (mm - 2mx + xx) ds}{\int (m - x) ds}$. Hoc loco, et in omnibus ſimilibus caſibus ſignum $-$ in numeratore aliud non ſignificat, quam quod valor poſitiuus ipſius l, capi debeat in axe penduli a puncto 2C, in partem contrariam illi in quam abſciſſa AD vergunt, id eſt ex 2C verſus A.

13. Si planum curuae BAB axi OO ad angulos

los rectos occurrit, hoc eſt, ſi curua in latus oſcillatur, tunc quidem elementa Bb adhuc ponduſcula P, in formula generali ſignificabunt, ſed eorum diſtantiae iam erunt $CB = \sqrt{(mm + 2mx + xx + yy)}$, adeoque $\int P.CP^2$ nunc ſignificabit $\int (mm + 2mx + xx + yy) ds$. Et M.CM nunc iterum $= \int (m + x) ds$, hisce vero in formula $l = \frac{\int P.CP^2}{M.CM}$ ſuffectis inuenitur $l = \frac{-\int (mm + 2mx + xx + yy) ds}{\int (m - x) ds}$, ſi axis oſcillationis eſt in OO. $l = \frac{-\int (mm - 2mx + xx + yy) ds}{\int (m - x) ds}$, ſi axis oſcillationis eſt in 2O2O.

14. Oſcilletur iam figura plana BAC in planum, et nunc elementa BB$bb = 2y dx$ erunt ponduſcula P in formula generali, eorum diſtantiae ab axe oſcillationis $CD = m + x$. Adeoque $\int P.CP^2 = \int (2mmydx + 4mxydx + 2xydx)$. Et $M.CM = \int (2mydx + 2xydx)$ adeoque $l \left(= \frac{\int P.CP^2}{M.CM}\right) = \frac{\int (2mm + 4mx + 2xx) ydx}{\int (2m + 2x) ydx} = \frac{\int (mm + 2mx + xx) ydx}{\int (m + x) ydx}$. vel $l = \frac{-\int (mm - 2mx + xx) ydx}{\int (m - x) ydx}$ ſi axis oſcillationis eſt in 2O2O.

15. Agitetur iam figura BAB in latus, hoc caſu vero ſingula puncta ordinatae BB diſtantiam ab axe oſcillationis OO variant: v. gr. puncti E diſtantia eſt CE, et alius puncti diſtantia eſt alia; hanc ob cauſam primum $\int CE^2 \times Ee$, in vna ſemiordinata eſt indaganda. Sit ergo $DE = u$, et $Ee = du$, et erit $CE^2 \times Ee = mmdu + 2mxdu + xxdu + uudu$, et ſumtis integralibus conſiderando iam x aeque ac m conſtantem ſolamque u variabilem, inuenietur $\int CE^2, Ee = mmu + 2mxu + xxu + \frac{1}{3} u^3$, et conuertendo u in

in y inuenietur pro tota ſemiordinata BD, ſumma omnium $CE^2.Ee = (mm + 2mx + xx + \frac{1}{3}yy)y$; erit ergo nunc $\int P.CP^2 = \int (mm + 2mx + xx + \frac{1}{3}yy)ydx$, et $M.MC = \int (m + x)ydx$, adeoque

$l = \frac{\int (mm + 2mx + xx + \frac{1}{3}yy)ydx.}{\int (m + x)ydx}$ . . ſi axis oſcillationis eſt OO. Et $l = \frac{-\int (mm - 2mx + xx + \frac{1}{3}yy)ydx}{\int (m - x)ydx}$, ſi axis oſcillationis eſt 2O2O.

16. Conſideremus porro ſuperficies ſolidorum rotundorum ex reuolutione figurae cuiuscunque BAD circa axem CD ortas. Hoc caſu ponduſcula P, fiunt zonulae conicae, quae naſcuntur ex elemento Bb curuae circa axem CD in gyrum acto, vocando vero peripheriam circuli p, cuius radius eſt 1, eiusmodi zonula fiet $= pyds$, eius diſtantia ab axe oſcillationis $= \sqrt{(mm + 2mx + xx + yy)}$ adeo vt ſit $\int P.CP^2 = \int (mm + 2mx + xx + yy)\, pyds$. Item $M.CM = \int (m + x)ypds$, ergo

$l \left(= \frac{\int P.CP^2}{M.CM}\right) = \frac{\int (mm + 2mx + xx + yy)yds}{\int (m + x)yds}$, vel

$l = \frac{-\int (mm - 2mx + xx + yy)yds}{\int (m - x)yds}$, ſi axis oſcillationis ſit in altera parte 2O2O.

17. Quantum ad haec ſolida rotunda ipſa, ſi eorum centrum oſcillationis inueniendum ſit, cuius quaelibet ſectio axi normalis eſt circulus BHI cuius radius $BD = y$. Sit in ſemicirculo HBI zonula FEGgeſ cuius radius $DE = u$, primum inueniri debet ſumma omnium CE^2. FEGgeſ, quae continentur in toto ſemicirculo HBI; eſt vero ſemicirculus $FEG = \frac{1}{4}puu$, ſi p iterum deſignet circumferentiam

cuius radius 1, et zonula $FeG = \frac{1}{2}pudu$. Diſtantia $CE = \sqrt{(mm + 2mx + xx + yy)}$, quare $CE^2, FeG = \frac{1}{2}pmmudu + pmxudu + \frac{1}{2}pxxudu + \frac{1}{2}pu^3du$, et $\int CE^2. FeG = (mm + 2mx + xx + \frac{1}{2}uu).\frac{1}{4}pdu$, conuertatur nunc iterum u in y, et habebimus $\int CE^2. FeG = (mm + 2mx + xx + \frac{1}{2}yy).\frac{1}{4}pyydx$, quare fit $\int P.CP^2 = \int(mm +$
Fig. 5. $2mx + xx + \frac{1}{2}yy)\frac{1}{4}pyydx$, $M.CM = \int(m + x)\frac{1}{8}pyydx$, quare $l = \frac{\int(mm + 2mx + xx\frac{1}{2}yy).2yydx,}{\int(m + x)yydx}$ vel $l = \frac{-\int(mm + 1mx + xx + \frac{1}{2}yy)2yydx}{\int(m - x)yydx}$ pro axe oſcillationis poſito in 2O2O.

Non immorabimur nunc applicationi praecedentium canonum generalium ad exempla particuliaria, quippe quae nullam prorſus difficultatem inuoluit, cum res ſit puri calculi.

De Centro Oſcillationis aquae in Syphone oſcillantis.

Fig. 6. 18. Sit tubus cylindricus ABCH vtrobique apertus, atque inflexus in duo crura BA, CH ad partem horizontalem BC. Sit ſinus anguli $ABC = p$; et ſinus anguli $HCB = q$ exiſtente ſinu toto $= 1$. Sit porro tubus ille aqua plenus vsque ad horizontalem MN, et vocetur L longitudo partis tubi MBCN aqua plenae; eruntque agitati liquoris in tubo oſcillationes tam maiores quam minores tautochronae. Quaeritur autem longitudo penduli ſimplicis oſcillationes eodem tempore perficientis cum aqua in tubo oſcillante.

Pertingat aqua oſcillationes ſuas peragens in tubo HC vsque ad D, et in altero AB vsque in E. Du-

Ducatur horizontalis Ef, et huic agatur normalis CG, horizontalem MN ſecans in I. Propter continuitatem aquae in vtroque tubo erit DN$=$ME. Dicantur HN$=e$, HD$=x$, erit DN$=e-x=$ME. Fiat vt ſinus totus (1) ad ſinum anguli NME(p), ita ME($e-x$) ad IF($ep-px$), poſtea vt ſinus anguli MNf(q) ad ſinum totum (1) ita IF ($ep-px$) ad Nf($\frac{ep-px}{q}$). Hinc D$f=e-x+\frac{ep-px}{q}=\frac{(p+q)(e-x)}{q}=\frac{er-rx}{q}$, facta $r=p+q$. Fiat denuo vt ſinus totus (1) ad ſinum anguli CDf(q), ita Df($\frac{er-rx}{q}$) ad OF($er-rx$). Haec vero OF eſt potentia in tubo aquam agitans, et quia haec potentia in elementum (dt) temporis, quo effectum ſuum edit, ducta, eſt vt effectus productus, id eſt, vt incrementum celeritatis (du) ductum in maſſam agitandam L, poſita celeritate actuali aquae $=u$, ideo habetur $(er-rx)dt=\mathrm{L}du$. Atqui $dt=\frac{dx}{u}$, ergo $\frac{erdx-rxdx}{u}=\mathrm{L}du$, vel $erdx-rxdx=\mathrm{L}udu$, et ſumtis integralibus $2erx-rxx=\mathrm{L}uu$, et $u=\sqrt{(\frac{2erx-rxx}{\mathrm{L}})}$. Quare elementum temporis deſcenſus aquae per ſpatium HD, id eſt $\frac{dx}{u}=\frac{dx\sqrt{(\mathrm{L}:r)}}{\sqrt{(2ex-xx)}}$, iam ſi A ſignificet angulum, cuius ſinus verſus $=x$, erit eius elementum $d\mathrm{A}=\frac{dx}{\sqrt{(2ex-xx)}}$, adeoque $\frac{dx}{u}=\frac{d\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{r}}$, et tempus deſcenſus per HD$=\frac{\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{r}}$, conſequenter deſcenſus per HN$=\frac{ang.\ rect.\ \sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{r}}$. Nam angulus cuius ſinus verſus aequat radium, eſt rectus. Sed alibi (§. 174. *Phor.*) demonſtraui, quod duratio dimidiae vibrationis alicuius penduli, cuius longitudo $=l$ futura ſit $=$angulo recto in $\sqrt{l}$, quare faciendo ang.

 rect.

rect. in $\surd l = \frac{ang. recto\ in\ \surd L}{\surd r}$, habetur $\surd l = \frac{\surd L}{\surd r}$, atque adeo $l = \frac{L}{r} = \frac{L}{p+q}$. Ergo tale pendulum ſuas oſcillationes eodem tempore conficiet, quo aqua ſuas oſcillationes in tubo ABCH. Quod erat inueniendum.

Si $p = q = 1$, hoc eſt ſi rami AB, HC ramo horizontali BC perpendiculariter inſiſtunt, fiet $l = \frac{1}{2}L$, vt *Nevtonus in Principiis ſuis Philoſophiae* invenit et demonſtrauit. Sed generaliter, caſus qualem hic demonſtratum dedi, Cel. *Ioanni Bernoulli* eſt acceptus ferendus, qui illum in Tomo Secundo Commentariorum huius Academiae ad demonſtrandam conſeruationem Virium viuarum, vna cum aliis nonnullis theorematibus ad eandem rem facientibus, ſine demonſtratione publicari curauit.

IOH. BERNOVLLI

MEDITATIONES

De chordis vibrantibus, cum ponduſculis aequali interuallo a ſe inuicem diſsitis, vbi nimirum ex principio virium viuarum quaeritur numerus vibrationum chordae pro vna oſcillatione penduli datae longitudinis D.

Conſ. Comm. Tom. II. p. 220.

CHorda vibrans ACDEF &c. cui ad diſtantias aequales affixa ſunt ponduſcula aequalia, C, D, E, F, &c. in eam ſe componere debet figuram, vt ſingula ponduſcula ſimul perueniant in ſitum rectilineum AB. vnde ſequitur, ſingulorum velocitates adeoque et vires acceleratrices proportionales eſſe debere longitudinibus percurrendis, C*c*, D*d*, E*e*, &c. Sed per principia ſtatica, tenſio chordae eſt ad vim qua ponduſculum quoduis, ex. gr. E, vrgetur verſus *e*, vt ſinus ang. DE*e* ad ſin. ang. DEF, vel IEF, i. e. (ob figuram chordae fere rectam, et ponduſculorum interualla aqualia) vt ſinus totus ad FI. Ergo ex aequo diſtantiae C*c*,D*d*,E*e*,&c. proportionales ſunt ipſis DG,EH,FI, &c. reſpectiue. Iam DG=G*d*–D*d*=2C*c*– Tab. II. Fig. I.

Dd $=$ $2a-x$; HE $=$ He $-$ Ee $=$ 2Dd-Cc-Ee $=$ $2x-a-y$; FI $=$ I$ſ$-F$ſ$ $=$ 2Ee-Dd-F$ſ$ $=$ $2y-x-z$; &c. vnde $2a-x.a::2x-a-y.x::2y-x-z.y::2z-y-t.z::$&c. Hinc ſequentia fluunt Lemmata.

1. Si duo ſint ponduſcula, erit $x=a$, $y=o$, reliqua non conſiderantur.

2. Si tria ſint ponduſcula, erit $y=a$, $z=o$, reliquis non conſideratis, adeoque $2a-x.a::2x-2a.x$, vnde $2ax-x^2=2ax-2a^2$, & $x=a\sqrt{2}$.

3. Si quatuor ſint ponduſcula, erit $y=x$, $z=a$, & $t=o$, non conſideratis reliquis, adeoque $2a-x.a::x-a.x$; vnde $2ax-x^2=ax-a^2$, & $x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

4. Si quinque ſint ponduſcula, erit $z=x$, $t=a$, $u=o$, reliquis neglectis: adeoque $2a-x.a::2x-a-y.x::2y-2x.y$; hinc duae aequationes habentur, $x^2=a^2+ay$ & $yx=2ax$. Ex priori aequatione eſt $y=\frac{x^2-a^2}{a}$ ex poſteriori. $y=2a$, vnde $x=a\sqrt{3}$.

5. Si ſex ſint ponduſcula erit $z=y$, $t=x$, $u=a$, $s=o$, reliquis neglectis: adeoque $2a-x.a::2x-a-y.x::y-x:y$. hinc duae aequationes. $x^2=a^2+ay$, & $ay-yx=-ax$. Ex poſteriori aequatione $y=\frac{ax}{-a+x}$; ex altera $y=\frac{x^2-a^2}{a}$, vnde $a^2x=x^3-ax^2-a^2x+a^3$, ſeu $x^3-ax^2-2a^2x+a^3=o$.

6. Si ſeptem ſint ponduſcula, erit $t=y$, $u=x$, $s=a$, $w=o$, non attento ad reliqua. Adeoque $2a-x.a::2x-a-y.x::2y-x-z.y::2z-2y.z$, & ita tres habentur aequationes $x^2=aa+ay$, $xy=ax+az$ & $xz=2ay$. Ex aequatione ſecunda $z=\frac{xy-ax}{a}$, ex ter-

tia $z=\frac{2ay}{x}$, vnde $y=\frac{ax^2}{x^2-2a^2}$ & $z=\frac{2a^2x}{x^2-2a^2}$; Eſt vero ex aequatione prima $y=\frac{x^2-a^2}{a}$, igitur $\frac{x^2-a^2}{a}=\frac{ax^2}{x^2-2a^2}$ vnde $a^2x^2=x^4-3a^2x^2+2a^4$, ſeu $x^4-4a^2x^2+2a^4=0$, adeoque $x^2=2a^2\pm a^2\sqrt{2}$, & $x=a\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$; $y=a\pm a\sqrt{2}$; $z=\frac{2a\pm 2a\sqrt{2}}{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}=\pm a\sqrt{4\pm 2\sqrt{2}}$. Vbi notandum ſigna inferiora huc non quadrare.

Probl. 1. Sit nunc chorda vel filum ALB omnis craſſitiei expers oneratum in medio ponduſculo L, ſitque filum tenſum a pondere P; quaeritur tempus ſemivibrationis per LC. Eſto LC$=a$, AL vel AC$=b$ erit AL$-$AC$=\frac{AL^2-AC^2}{AL+AC}=\frac{LC^2}{2AC}=\frac{a^2}{2b}$, & ALB$-AB=\frac{a^2}{b}=$ deſcenſui ponderis P filum tendentis; ſit $z=$ altitudini verticali per quam graue libere deſcendens acquirit velocitatem aequalem illi quam habet punctum L quando peruenit in C, quae velocitas adeo erit $=\sqrt{z}$. Erit vis viua ponduſculi L $=Lz=$ vi viuae ponderis tendentis $=\frac{a^2}{b}\times$ P, vnde $z=\frac{a^2\times P}{b\times L}$: Quia vero vis trahens punctum L verſus C ſemper eſt proportionalis diſtantiae LC, erit ſupponendo diametrum circuli ad eius circumferentiam vt 1 ad p; & v velocitatem puncti L in C, tempus per LC ſeu tempus ſemiuibrationis $=\frac{ap}{2v}=\frac{ap}{2\sqrt{z}}=\frac{p\sqrt{b.L}}{2\sqrt{P}}$, & tempus vnius ſemioſcillationis penduli datae longitudinis D, $=p\sqrt{\tfrac{1}{2}}$D. Ergo $p\sqrt{\tfrac{1}{2}}$D di- Fig. 2.

diuiſum per $\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{P}}$, hoc eſt, $\frac{\sqrt{2D\times P}}{\sqrt{b\times L}}$ dabit numerum vibrationum fili durante vna oſcillatione penduli $D = \frac{\sqrt{4D\times P}}{\sqrt{AB\times L}} = \frac{2\sqrt{D\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$.

Fig. 3. 2. Sit nunc filum AFGB tenſum a pondere P et oneratum duobus ponduſculis aequalibus, quorum vnumquodque $= \frac{1}{2}L$, & quae diuidant filum in tres partes aequales, AF, FG, GB. Sit iterum $FC = GE = a$ & $AC = CE = EB = b$, erit $AF - AC = BG - BE = \frac{a^2}{2b}$, adeoque $AFGB - AB = \frac{a^2}{b} =$ deſcenſui ponderis P. Sit iterum $\sqrt{z} =$ velocitati puncti F in C vel puncti G in E; erunt vires viuae ponduſculorum F & G ſimul $= Lz =$ vi viuae ponderis tendentis P, $= \frac{a^2}{b} \times P$, vnde $z = \frac{a^2 \times P}{b \times L}$: reliqua ergo inueniuntur vt prius, niſi quod iam ponendum ſit pro numero vibrationum $\frac{\sqrt{2D\times P}}{\sqrt{b\times L}} = \frac{\sqrt{2D\times P}}{\sqrt{\frac{1}{3}AB\times L}} = \frac{\sqrt{6D\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$.

3. Sint iam tria ponduſcula ſingula $= \frac{1}{3}L$, erit rurſus $AF - AC = BH - BI = \frac{a^2}{2b}$. Sed $FG - CE = HG - IE =$ (ex Lemm. 2.) $\frac{3a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2b}$. Hinc $AFGHB - AB = \frac{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{b} =$ deſcenſui ponderis P filum tendentis: erit nunc, vocata $\sqrt{z}$ velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in E $= \sqrt{2z}$, vnde quantitas virium viuarum omnium ponduſculorum ſimul $= \frac{4}{3} z \times L =$ vi viuae ponderis tendentis $= \frac{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{b} \times P$, adeoque $z = \frac{6a^2 - 3a^2\sqrt{2}}{2b\times L} \times P = \frac{(12a^2 - 6a^2\sqrt{2})\times P}{AB\times L}$, et ſic $\sqrt{z}$ vel $v = \frac{\sqrt{12a^2 - 6a^2\sqrt{2}\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$ et tem-

tempus per FC, ſeu $\frac{ap}{2v} = \frac{p\sqrt{AB \times L}}{2\sqrt{12 - 6\sqrt{2} \times P}}$. Igitur $P\sqrt{\frac{1}{2}D}$ diuiſum per $\frac{ap}{2v}$, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{6 - 3\sqrt{2} \times P \times D}}{\sqrt{AB \times L}}$ dabit numerum vibrationum fili in vna oſcillatione penduli dati D.

4. Sint ponduſcula quatuor, ſingula $= \frac{1}{4}L$, Fig. 5. ſupponendo tantiſper $GE = HI = x$, reliquis vt prius manentibus. Erit iterum $AF - AC = BK - BM = \frac{a^2}{2b}$; $FG - CE = KH - MI = \frac{x^2 - 2ax + a^2}{2b}$, vnde AFGHKB $- AB = \frac{x^2 - 2ax + 2a^2}{b} =$ deſcenſui ponderis P. Vocetur velocitas puncti F in $C = \sqrt{z}$, erit velocitas puncti G in $E = \frac{x}{a}\sqrt{z}$; ac proinde ſumma virium viuarum omnium ponduſculorum $= \frac{a^2 + x^2}{2a^2} \times z \times L =$ vi viuae ponderis $P = \frac{x^2 - 2ax + 2a^2 \times P}{b}$; igitur $z = \frac{2a^2x^2 - 4a^3x + 4a^4 \times P}{a^2 + x^2 \times bL}$. Quare $\sqrt{z}$ vel v $= \frac{a\sqrt{2x^2 - 4ax + 4a^2 \times P}}{\sqrt{a^2 + x^2 \times bL}}$; atque tempus per FC $= \frac{ap}{2v}$ $= \frac{p\sqrt{a^2 + x^2 \times bL}}{2\sqrt{2x^2 - 4ax + 4a^2 \times P}}$. Ideoque $p\sqrt{\frac{1}{2}D}$ diuiſum per $\frac{ap}{2v}$, h. e. $\frac{\sqrt{4x^2 - 8ax + 8a^2 \times D \times P}}{\sqrt{a^2 + x^2 \times bL}} =$ (quia per Lemma 3. $x = \frac{1}{2}$ $a + a\sqrt{\frac{5}{4}}$) $\frac{2\sqrt{5 - \sqrt{5} \times D \times P}}{\sqrt{5 + \sqrt{5} \times bL}} = \frac{2\sqrt{25 - 5\sqrt{5} \times D \times P}}{\sqrt{5 + \sqrt{5} \times AB \times L}}$ dabit numerum vibrationum fili ſemel oſcillante pendulo D.

5. Sint iam quinque ponduſcula, quorum v-

numquodque $=\frac{1}{5}$L. Supponendo iterum GE$=$KM $=x$, reliquis ſemper manentibus, erit HI ſeu y (per Lemma 4.) $=2a$ & $x=a\sqrt{3}$, & AF$-$AC$=$BN$-$BO$=\frac{a^2}{2b}$; FG$-$CE$=$NK$-$OM$=\frac{x^2-2ax+a^2}{2b}=\frac{4a^2-2a^2\sqrt{3}}{2b}$; GH$-EI=KH-MI=\frac{y^2-2yx+x^2}{2b}=\frac{7a^2-4a^2\sqrt{3}}{2b}$; quocirca AFGHKNB$-AB=\frac{12a^2-6a^2\sqrt{3}}{b}=$ deſcenſui ponderis P. Eſt autem ſumta $\sqrt{z}$ pro velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in E $=\sqrt{3z}$, et velocitas puncti H in I$=2\sqrt{z}$. Per conſequens aggregatum virium viuarum omnium ponduſculorum$=\frac{12}{5}z\times L=$ vi viuae ponderis tendentis P$=\frac{12a^2-6a^2\sqrt{3}}{b}\times P$, proinde $z=\frac{\overline{10a^2-5a^2\sqrt{3}}\times P}{2b\times L}=\frac{\overline{30a^2-15a^2\sqrt{3}}\times P}{AB\times L}$; et ita $\sqrt{z}$ vel $v=\frac{a\sqrt{\overline{30-15\sqrt{3}}\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$, vnde tempus per FC ſeu $\frac{ap}{2v}=\frac{p\sqrt{AB\times L}}{2\sqrt{\overline{30-15\sqrt{3}}\times P}}$. Ideoque $p\sqrt{\frac{1}{2}D}$ diuiſum per $\frac{ap}{2v}$ h. e. $\frac{\sqrt{\overline{60-30\sqrt{3}}\times D\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$, dabit numerum vibrationum fili durante vna oſcillatione penduli D.

6. Sunto ponduſcula ſex, quorum ſingula $=\frac{1}{6}$L, Poſitis nunc GE$=$NO$=x$, HI$=$KM$=y$ erit AF$-$AC$=$BR$-$BS$=\frac{a^2}{2b}$, FG$-$CE$=$RN$-$OM$=\frac{x^2-2ax+a^2}{2b}$, GH $-$ EI $=$ NK $-$ OM $=\frac{y^2-2yx+x^2}{2b}$, propterea AFGHKNRB$-$AB$=\frac{2x^2-2ax+2a^2+y^2-2yx}{b}=$ deſcenſui ponderis P. Eſt vero ſumta $\sqrt{z}$ pro velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in E$=\frac{x\sqrt{z}}{a}$, et velocitas puncti H in I$=\frac{y\sqrt{z}}{a}$, vnde ſumma virium viuarum

varum omnium ponduſculorum $= \frac{a^2+x^2+y^2}{3a^2} z \times L =$ vi viuae ponderis tendentis $P = \frac{2x^2-2ax+2a^2+y^2-2yx}{b} \times P$, et ideo $\sqrt{z} = \frac{\sqrt{6a^2x^2-6a^3x+6a^4-3a^2y^2-6a^2yx.P}}{\sqrt{a^2+x^2+y^2 \times bL}} = v$.

Hinc tempus per FC $= \frac{ap}{2v}$

$$= \frac{ap\sqrt{a^2+x^2+y^2 \times bL}}{2\sqrt{6a^2x^2-6a^3x+6a^4-3a^2y^2-6a^2yx \times P}}.$$

Idcirco $p\sqrt{\frac{1}{2}D}$ diuiſum per $\frac{ap}{2v}$, h. e.

$\frac{\sqrt{12a^2x^2-12a^3x+12a^4+6a^2y^2-12a^2yx \times D.P}}{a\sqrt{a^2+x^2+y^2 \times bL}}$ $=$ (ob Lemma 5. vbi $y = \frac{ax}{-a+x}$ et $y = \frac{x^2-a^2}{a}$, indeque $y^2 = x^2+ax$) $\frac{\sqrt{18a^2x^2+6a^3x+12a^4-12ax^3 \times D \times P}}{a\sqrt{a^2+2x^2+ax \times bL}} =$ $\frac{\sqrt{126ax^2+42a^2x+84a^3-84x^3 \times D \times P}}{\sqrt{a^3+2ax^2+a^2x \times AB \times L}} =$ (ob Lemma 5 $x^3 = ax^2+2a^2x-a^3$) $\frac{\sqrt{42ax^2-126a^2x+168a^3 \times D \times P}}{\sqrt{a^3+2ax^2+a^2x \times AB \times L}} =$ $\frac{\sqrt{42x^2-126ax+168a^2 \times D \times P}}{\sqrt{2x^2+ax+a^2 \times AB \times L}}$ dabit numerum vibrationum fili oſcillante ſemel pendulo dato D, poſteaquam pro x ſubſtitutus fuerit eius valor, qui eſt radix huius aequationis $x^3-ax^2-2a^2x+a^3=0$.

Solutiones eorundem Problematum ex principiis ſtaticis

Lemma 1. Sit vis grauitatis naturalis g, qua corpora naturaliter animantur, h. e. ad deſcenſum vrgentur. Sit x altitudo per quam deſcendit, v velocitas in fine deſcenſus, t tempus deſcenſus, M maſſa ponderis P; erit $M \times g = P$; $\frac{gdx}{v} = dv$, adeoque $\sqrt{2gx} = v$.

Lemma 2. $\frac{dx}{v} = dt = \frac{dx}{\sqrt{2gx}}$; adeoque $t = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{g}}$.

Lemma 3. Quia alibi demonſtratum, tempus deſcenſus naturalis per diametrum alicuius circuli ad tempus ſemioſcillationis in cycloide aeque altae cum circulo vt $1 : \frac{1}{2}p :: 2 : p$, erit tempus ſemioſcillationis penduli datae longitudinis D, $= \frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$, eſt enim per Lemma praecedens, tempus deſcenſus per diametrum $= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{g}}$.

Fig. 6. *Lemma* 4. Tendat punctum F ad C viribus quae ſunt proportionales diſtantiis FC, demonſtratum eſt, vndecunque punctum F incipiat moueri, aequalibus ſemper temporibus percurrere diſtantiam FC. Sit itaque vis qua in qualibet diſtantia vrgetur $= f \times FC$ (per f intelligo parametrum illius vis, vt vis abſolute ſumta augeri et minui poſſit): His poſitis, ſit diſtantia FC a puncto quietis ſumta, $= a$, pars quaelibet $FO = x$; erit $\frac{f.\overline{a-x}.dx}{v} = dv$ adeoque $v = \sqrt{f.2ax - x^2}$, hinc $dt = \frac{dx}{\sqrt{f.2ax-x^2}}$ atque $t = \frac{1}{\sqrt{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$. Ergo tempus per totam FC, $= \frac{p}{2\sqrt{f}}$.

Probl.

Problema 1. Producatur AF in ſecunda figura Fig. 2.
et ſequentibus. Vis ponderis P eſt ad vim qua punctum F verſus C vrgetur, vt ſinus anguli AFC ad ſinum ang. VFB = ſin. ang. AFC : ſin. dupli ang. FAC = (quia FAC pro infinite paruo habetur) AC. 2FC :: $b.2a$, adeoque vis qua punctum F verſus C vrgetur $=\frac{2a}{b}\times P=\frac{2a}{b}M\times g$ (intelligo per M maſſam ponderis P. Quia vero ponduſculum L, a cuius grauitate nunc abſtrahitur, conſiderando tantum eius maſſulam, vrgeri debet ad C, vi quae exprimitur per $f\times a\times L$, erit $\frac{2a}{b}M\times g=fa\times L$, vnde $f=\frac{2gM}{bL}$, adeoque per Lemma 4. huius, erit tempus per FC $(\frac{p}{2\sqrt{f}})=\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{2gM}}=$ tempuſculo ſemiuibrationis fili; diuidendo itaque tempus ſemioſcillationis penduli dati D, quod (per Lemma 3.) $=\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$, per tempuſculum ſemiuibrationis fili $\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{2gM}}$, quod prouenit $\frac{\sqrt{2D\times M}}{\sqrt{b\times L}}=$ (ſubſtituendo pro maſſis pondera) $\frac{2\sqrt{D\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$ dabit numerum quaeſitum vibrationum fili, prorſus vt in ſolutione praecedente per vires viuas eruta.

Problema 2. Nunc eſt P ad vim puncti Fig. 3.
F verſus C vt ſinus AFC ad ſinum VFG ſeu ſin. FAC :: $b:a$; vnde vis puncti F ad C $=\frac{a}{b}M\times g=fa\times\frac{1}{2}L$, adeoque $f=\frac{2gM}{bL}$, et tempus per FC $(\frac{p}{2\sqrt{f}})=\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{2gM}}=$ tempuſculo ſemivibrationis fili. Diuiſum itaque $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per $\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{2gM}}$ dabit $\frac{\sqrt{2D\times M}}{\sqrt{bL}}=\frac{\sqrt{6D\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$ pro numero vibrationum quaeſito, vt ſupra.

Problema 3. Vocetur hic et in ſequen- Fig. 4
tibus Φ vis puncti F verſus C; erit iam P. Φ :: ſAFC. ſVFG; (per ſ intelligo ſinum anguli). Eſt vero ex

Lemmate ſecundo priori methodo praemiſſo, $\int VFG$ (quia infinite paruus) $= 2a - a\sqrt{2}$, ſumto b pro radio: hinc $\Phi = \frac{2a - a\sqrt{2}}{b} \times P = \frac{2a - a\sqrt{2}}{b} \times Mg = \int a \times \frac{1}{3} L$, vnde $f = \frac{\overline{6 - 3\sqrt{2}}.Mg}{bL}$, tempuſque per FC $\left(\frac{p}{2\sqrt{f}}\right) = \frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{\overline{6 - 3\sqrt{2}} \times Mg}} =$ tempuſculo ſemiuibrationis fili; adeoque diuidendo $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per $\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{\overline{6 - 3\sqrt{2}} \times Mg}}$, quod orietur $\frac{\sqrt{\overline{6 - 3\sqrt{2}} \times D \times M}}{\sqrt{bL}} = \frac{2\sqrt{\overline{6 - 3\sqrt{2}} \times D \times P}}{\sqrt{AB \times L}}$ dabit quaeſitum numerum vt ante.

Fig. 5. *Probl.* 4. Hic iterum $P : \Phi :: \int AFC : \int VFG$ eſt autem, ex Lemmate 3. pro ſuperiori methodo, $\int VFG$ (quia infinite paruus) $= \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{1}{5}a^2} = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$ ſumto b pro ſinu toto: vnde $\Phi = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2b} \times P = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2b} \times Mg = \int a \times \frac{1}{4} L$, ex quo $f = \frac{\overline{6 - 2\sqrt{5}} \times Mg}{bL}$, ac tempus per FC $\left(\frac{p}{2\sqrt{f}}\right) = \frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{\overline{6 - 2\sqrt{5}} \times Mg}} =$ tempuſculo ſemiuibrationis fili. Hinc diuidendo $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per $\frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{\overline{6 - 2\sqrt{5}}\, Mg}}$ acquiritur $\frac{\sqrt{\overline{6 - 2\sqrt{5}} \times D \times M}}{\sqrt{bL}} = \frac{\sqrt{\overline{30 - 10\sqrt{5}} \times D \times P}}{\sqrt{AB \times L}}$, quod dabit numerum vibrationum conformem ſuperiori, nam $\frac{\sqrt{\overline{30 - 10\sqrt{5}} \times D \times P}}{\sqrt{AB \times L}}$, $= \frac{2\sqrt{\overline{25 - 5\sqrt{5}} \times D \times P}}{\sqrt{\overline{5 + \sqrt{5}} \times AB \times L}}$.

Probl. 5. Figura in mente concipienda eſt. Hic habemus ex Lem. 4. praeliminari, $\int VFG$ infinite paruum $= 2a - a\sqrt{3}$; adeoque $\Phi = \frac{2a - a\sqrt{3}}{b} \times P = \frac{2a - a\sqrt{3}}{b} \times Mg = \int a \times \frac{1}{5} L$, vnde $f = \frac{\overline{10 - 5\sqrt{3}} \times Mg}{bL}$, & tempus per FC $\left(\frac{p}{2\sqrt{f}}\right) = \frac{p\sqrt{bL}}{2\sqrt{\overline{10 - 5\sqrt{3}} \times Mg}} =$ tempuſculo ſemiuibrationis fili: quare diuidendo $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per hoc, prodit $\frac{\sqrt{\overline{10 - 5\sqrt{3}} \times D \times M}}{\sqrt{bL}} = \frac{\sqrt{\overline{60 - 30\sqrt{3}} \times D \times P}}{\sqrt{AB \times L}}$ pro numero vibrationum quaeſito vt ſupra.

Probl.

Probl. 6. Ex Lemmate 5. praeliminari hic erit $\int$VFG (ob infinite paruum) $= 2a - x$, vbi x eſt radix huius aequationis $x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$, eritque $\Phi = \frac{2a-x}{b} \times P = \frac{2a-x}{b} \times Mg = fa \times \frac{1}{6}L$, vnde $f = \frac{12a-6x}{ab \times L} \times Mg$, et tempus per FC $\left(\frac{p}{2\sqrt{f}}\right) = \frac{p\sqrt{ab.L}}{2\sqrt{12a-6x.Mg}}$ = tempuſculo ſemiuibrationis fili; Diuidendo itaque $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per hoc, oritur $\frac{\sqrt{12a-6x \times M \times D}}{\sqrt{ab \times L}} = \frac{\sqrt{84a-42x \times D \times P}}{\sqrt{a.AB.L}}$ $= \frac{\sqrt{42x^2 - 126ax + 168a^2 \times D \times P}}{\sqrt{2x^2 + ax + a^2 \times D \times P}}$ vt multiplicanti per crucem patebit.

Scholium

Res generaliter tractari poteſt pro quocunque numero ponduſculorum: Sit enim numerus ponduſculorum n, et habebitur $\Phi = \frac{2a-x}{b} \times Mg = fa \times \frac{1}{n}L$. unde $f = \frac{\overline{2na-nx} \times Mg}{ab \times L}$, et tempus per FC $\left(\frac{p}{2\sqrt{f}}\right) = \frac{p\sqrt{ab \times L}}{2\sqrt{2na-nx \times Mg}}$ = tempuſculo ſemiuibrationis fili. Ergo diuiſo $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per hoc prodibit $\frac{\sqrt{2na-nx \times D \times M}}{\sqrt{ab.L}} = \frac{\sqrt{n+1}.\ \overline{2na-nx} \times D \times P}{\sqrt{a \times AB \times L}}$ = numero qui quaeritur vibrationum fili oſcillante ſemel pendulo dato D. In qua expreſſione pro x ſubſtituendus eſt eius valor, qui quaeri debet per methodum in Lemmatibus praeliminaribus adhibitam. Sic ex. gr. ſi ſeptem ſint ponduſcula, in quo caſu $n = 7$, et x (per Lemma praeliminare 6tum) $= a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, erit $\frac{\sqrt{n+1}\ \overline{2na+nx} \times D \times P}{\sqrt{a \times AB \times L}} = \frac{2\sqrt{28a-14x \times D \times P}}{\sqrt{a.\ AB.\ L}} = \frac{2\sqrt{28-14\sqrt{2+\sqrt{2}} \times D \times P}}{\sqrt{AB \times L}}$, = numero quaeſito vibrationum, qui quam proxime accedit ad $\frac{2\sqrt{2.D \times P}}{\sqrt{AB \times L}}$, iuſto minorem.

Probl.

Probl. 7. Eſto nunc chorda muſica AB vniformiter craſſa, cuius quantitas materiae$=$L, eaque tenſa a pondere P$=$Mg, quaeritur numerus vibrationum in vna oſcillatione penduli dati D.

Fig. 7. *Solutio* Induat chorda extra ſitum rectilineum AB figuram curuilineam AEB, quae ea eſſe debet, vt quodlibet eius punctum K eodem tempuſculo perueniat ad punctum correſpondens H in ſitu rectilineo, quo punctum medium E peruenit ad C; id quod facit, vt vis acceleratrix qua punctum K verſus H vrgetur, vbique ſit proportionalis diſtantiae KH. Ductis ergo duabus tangentibus proximis KG, GF; et ex K et S applicatis KH, SI: erit ex principio ſtatico pondus P ſeu Mg ad vim qua particula chordae KS verſus H vrgetur, vt ſinus anguli KSO, qui pro recto habetur, ad ſin. ang. GKF, hoc eſt, vt 1 ad $\frac{FG}{KG}$, poteſt enim KF conſiderari tanquam perpendicularis ad axem CF, erit itaque vis illa in K$=\frac{FG \times Mg}{KG} = f \times KH \times dL$, et inde vis ipſa acceleratrix ſeu $f \times KH = \frac{FG \times Mg}{KG \times dL}$. Vt autem determinetur $\frac{FG}{KG}$, notandum eſt, curuam AEB eſſe trochoidis ſociam elongatam, h. e. eius naturae, vt deſcripto quadrante circuli EMN, et ducta KR parallela baſi AC, ſit AC. KR :: EMN. EM. cuius demonſtrationem infra adiiciemus. Sit nunc EC $= a$, ER$=x$, EM$=s$, EMN $= \frac{1}{2}pa$ (intelligo ſemper 1 ad p vt diametrum ad circumferentiam); Sit etiam AC. EMN::n.1, erit KR$=ns$, et reperietur ſubtangens RG$=$

$RG = \frac{s\sqrt{2ax-x^2}}{a}$, $CG = a-x+\frac{s\sqrt{2ax-x^2}}{a}$, eiusque differentialis $FG = -dx+\frac{asdx-xsdx}{a\sqrt{2ax-x^2}}+dx = \frac{asdx-xsdx}{a\sqrt{2ax-x^2}}$, adeoque $\frac{FG}{KG}$ vel quod idem eſt $\frac{FG}{KR} = \frac{adx-xdx}{na\sqrt{2ax-x^2}}$, ipſum vero elementum KS, quod cenſetur aequale ipſi $KO, = nds = \frac{nadx}{\sqrt{2ax-x^2}}$. Eſt autem AB.HI(KO)::L.dL, vnde $dL = \frac{KO}{AB}\times L = \frac{nadx}{AB\sqrt{2ax-x^2}}$ L; quibus ergo ſubſtitutis in vi acceleratrice habetur $\frac{FG\times Mg}{KG\times DL} = \frac{AB\times \overline{a-x}\times Mg}{n^2 a^2 \times L} =$ (quia $npa = AB$) $\frac{p.\overline{a-x}^2.Mg}{AB\times L} = \frac{p^2 KH}{AB\times L}\times Mg = f\times KH$; adeoque $f = \frac{p^2\times Mg}{AB\times L}$, et tempus per KH$\left(\frac{p}{2\sqrt{f}}\right) = \frac{\sqrt{AB\times L}}{2\sqrt{M\times g}}$ = tempuſculo ſemiuibrationis chordae muſicae; diuiſo itaque $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$ per $\frac{\sqrt{AB\times L}}{2\sqrt{M\times g}}$ acquiritur $\frac{p\sqrt{D\times M}}{\sqrt{AB\times L}} = \frac{P\sqrt{D\times P}}{\sqrt{AB\times L}}$; numerus vibrationum chordae durante vna oſcillatione penduli datae longitudinis D; quemadmodum inuenit Taylorus. vid. Meth. Increm. p. 93. Et ſicuti ego quoque inueni ex principio virium viuarum, vt ſequitur.

Sit $DN = x$; $NG = y = n\int\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; $DG = s$; DC Fig. 8. $= a.\, ds-dy = \frac{ds^2-dy^2}{ds+dy} = \frac{dx^2}{2dy} =$ (ob $y = n\int\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$) dx^2 : $\frac{2nadx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{dx\sqrt{2ax-x^2}}{2na}$; adeoque $DA-CA = \int\frac{dx^2}{2dy} = \int\frac{dx\sqrt{2ax-x^2}}{2na} = \frac{\frac{1}{2}CD.DEF}{2nCD} = \frac{\frac{1}{4}DEF}{n} = \frac{DEF}{4n} = \frac{AC}{4n^2} = \frac{AB}{8n^2}$; hinc

2DA−2CA=ADB−AB=$\frac{AB^2}{4n}$= differentiae inter arcum et chordam. Radius oſculi in G, poſito elemento Gg vel ds conſtante, eſt generaliter $\frac{ds\,dy}{d^2x}$= (in curuis maxime elongatis vbi $dy=ds$) $\frac{dy^2}{d^2x}$. Ergo in hoc caſu trochoidis ſociae maxime elongatae vbi $dy=ds=\frac{na\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$=conſtanti, erit $nad^2x\sqrt{2ax-x^2}$ $\frac{-na^2dx^2+naxdx^2}{\sqrt{2ax-x^2}}=0$, vnde $d^2x=\frac{\overline{a-x}.dx^2}{2ax-x^2}$, adeoque radius oſculi $=\frac{dy^2}{d^2x}=\frac{n^2a^2dx^2}{2ax-x^2}:\frac{\overline{a-x}.dx^2}{2ax-x^2}=\frac{n^2a^2}{a-x}$. h. e. radii oſculi ſunt reciproce vt GH. Sit nunc pondus tendens chordam P, pondus chordae ipſius AB, L; velocitas puncti D cum vibrando venerit in C=$\sqrt{S}$ (intelligendo per S ſpatium per quod graue libere deſcendens acquirit velocitatem puncti D in C) erit puncti cuiuslibet G in H velocitas $=\frac{GH}{DC}\sqrt{S}=\frac{a-x}{a}\sqrt{S}$, adeoque $\frac{\overline{a-x}^2}{a^2}S\times\frac{Hb}{AB}\times L=\frac{\overline{a-x}^2}{a^2}\times\frac{dy\,L.S}{AB}=\frac{\overline{a-x}^2}{a}\times S\times\frac{ndx.L}{AB\times\sqrt{2ax-x^2}}$ = vi viuae particulae chordae Gg vel Hb in H $=\frac{nS.L}{a.AB}\times\frac{\overline{a-x}^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, id quod integrando habetur $\frac{nS.L}{a.AB}\times\overline{a-x}\sqrt{2ax-x^2}+\int dx\sqrt{2ax-x^2}$=(pro tota chorda) $\frac{2n.S.L}{a.AB}\times\frac{1}{2}a\times DEF=\frac{nS.DEF}{AB}=\frac{1}{2}L.S$ = quantitati virium viuarum totius chordae; Haec autem eſt aequalis vi viuae ponderis P deſcendentis per $\frac{AB^2}{4n}$, =

P ×

$P \times \frac{AB^2}{4n^2}$. Ergo $S = \frac{P \times AB^2}{2n^2 \times L} = \frac{2P.DEF^2}{L \times AB}$ et $\sqrt{S} = DEF\sqrt{\frac{2P}{L.AB}}$ Hinc inuenitur tempus per $DC = \frac{\sqrt{L \times AB}}{\sqrt{2P}}$. Eſt autem tempus ſemioſcillationis penduli ſimplicis cuius longitudo ſit $C = \frac{DEF}{DC} \times \sqrt{2C}$; vt igitur haec duo tempora ſint aequalia, faciendum eſt $\frac{\sqrt{L \times AB}}{\sqrt{2P}} = \frac{DEF \times \sqrt{2C}}{DC}$, vnde $C = \frac{DC^2\, AB \times L}{4DEF^2\, P}$. Ergo numerus vibrationum chordae in tempore vnius vibrationis penduli datae longitudinis $D, = \frac{2DEF \times \sqrt{D. \times P}}{DC \times \sqrt{AB \times L}} =$ (ſuppoſito $\frac{2DEF}{DC} = p$) $\frac{p\sqrt{D \times P}}{\sqrt{AB \times L}} =$, vt habet Taylorus, cui L et N ſunt quod mihi AB et L.

Sequitur demonſtratio eius, quod ſupra aſſeritur, chordam vibrantem ADB (vid. fig. praeced.) induere figuram ſociae trochoidis elongatae.

Oſtenſum eſt in ſuperioribus, ſinum anguli contactus in puncto chordae quocunque G proportionalem eſſe longitudini percurrendae GH. Iam retentis iisdem ſymbolis, quibus ſupra vſi ſumus, erit ſinus anguli contactus $= \frac{d^2x}{ds} =$ (ob figuram maxime elongatam et conſequenter $ds = dy =) \frac{d^2x}{dy}$, poſitis nimirum dy conſtantibus: longitudo autem percurrenda $GH = a - x$. Ergo $\frac{d^2x}{dy}$ ad $a - x$ in ratione conſtante. Sit illa ratio vt dy ad $n^2 a^2$, eritque $\frac{n^2 a^2 d^2x}{dy} = ady - xdy$, ſeu (diuid. per dy) $\frac{n^2 a^2 d^2x}{dy^2} = a - x$. Multiplicetur vtrumque membrum per dx, et habe-

 bitur

bitur $\frac{n^2 a^2 dx d^2 x}{dy^2} = adx - xdx$, ſumtisque integralibus $\frac{n^2 a^2 dx^2}{2dy^2} = ax - \frac{x^2}{2}$, ſeu $n^2 a^2 dx^2 = (2ax - x^2) dy^2$, vnde $\frac{nadx}{\sqrt{2ax-x^2}} = dy$ et $n\int\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}} = y$. Eſt itaque y (NG). $\int\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ (arc. DE) :: n. 1. i. e. applicata NG ad arcum DE in ratione conſtante, eaque valde magna; Eſt enim ratio AC ad CD valde magna (per hyp.) Ergo etiam ratio AC ad quadrantem DEF valde magna erit. Sed AC.DEF :: n. 1. (per demonſtr.) quare conſtat propoſitum.

DE ARITHMETICA FIGVRATA

EIVSQVE VSIBVS ALIQVOT

Autore

Fr. Chr. Maiero.

I.

M. Febr. 1726.

COmmodiorem hiſce meditationibus titulum non inueni, quam qui praefixus eſt; Conſidero enim naturam ſerierum numericarum poſſibilium omnium, quae eo modo generantur quo ſeries numerorum figuratorum generari ſolent; atque ita numeri figurati comprehenduntur ſub meis ſeriebus (quas collectiuas nominare liceat) tanquam ſpecies ſub genere. Differunt

ferunt meae ſeries praeterea a numeris figuratis in eo, quod eae vſus aliquot non ſpernendos praeſtent, dum Figurata Arithmetica vulgaris tanquam ſterilis haud immerito reputari ſolet.

2. Noua non ſunt omnia quae affero, modus enim ea tractandi, (qui forſan nouus eſt) requirebat vt miſcerem mea alienis. Sufficit mihi ſi id praeſtitiſſe iudicer, quod in vnum locum congeſſerim quae ex variis libris conquirenda eſſent Lectori, quod difficilem alias materiam facilem reddiderim, et acceſſionibus auxerim non contemnendis. Diu eſt, quod haec meditatus fui, et cum amico communicaui, cuius demum monito intellexi, eorum nonnulla etiam alibi, ſed aliter extare.

CAPVT I.

De natura ſerierum collectiuarum.

3. ASſumatur ſeries numerorum aequalium (qualis ea eſt quae in ſubiecto exemplo litera B ſignatur) dicaturque ſeries primi ordinis; Ex hac ſerie formetur ſecundi ordinis ſeries (C) cuius primus terminus ſit qualiscunque numerus; ſecundus autem ſit ſumma ex primo huius et ſecundo termino prioris ſeriei conflata; ex quo ſecundo, et tertio priore, fiat tertius; eodemque modo reliqui colligantur. Pro ſerie tertii ordinis (D) aſſumatur qualiscunque primus terminus, reliqui autem formentur ex ſecunda ſerie, vti termini ſeriei ſecundae ex prima formabantur. Pari ratione formentur quo-

que ſeriesE, F et quotcunque aliae. Has ſeries col-ctiuas nomino ; numeros in ſerie A qui indicant quotitatem cuiusuis termini, radices voco; numeros tandem qui indicant quoti ordinis ſit aliqua ſeries, indices dicere liceat. Exemplum rei ſequentes ſeries exhibent.

Radices		A....	1	2	3	4	5	6	7	8	9..
Indices	1	B...	3	3	3	3	3	3	3	3	3..
	2	C...	5	8	11	14	17	20	23	26	29..
	3	D...	5	13	24	38	55	75	98	124	153..
	4	E...	6	19	43	81	136	211	309	433	586..
	5	F...	13	32	75	156	292	503	812	1245	....

4. Ex data definitione intelligitur quoque quomodo ſeries retro continuari poſſint. Prima enim ſeries vbique eosdem et datos habet terminos; ſecunda autem retroagitur ſubtrahendo primae ſeriei terminum ſuperſtantem quemlibet a ſuo ſubſtante in ſecunda ſerie ; qui enim reſtat numerus eſt terminus ille qui ſubſtantem praecedit. Eodem modo continuatur tertia ſeries retro, ope ſecundae ſeriei ; quarta ope tertiae , et ſic porro. Ceterum id quoque manifeſtum eſt , quod ſerierum retroactarum radices negatiuae euadant. Terminos, qui primos quoslibet immediate praecedunt, differentias originales nomino , quarum conſequenter radices ſunt nihilo aequales. Quae dixi, exemplo ſequenti declaro.

Radi-

Radices		.... −4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5 ..
Indices	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3 ..
	2	−10	−7	−4	−1	2	5	8	11	14	17 ..
	3	10	3	−1	−2	0	5	13	24	38	55 ..
	4	−1	4	3	1	1	6	19	43	81	136 ..
	5	−2	2	5	6	7	13	32	75	156	292 ..

5. Duas ſerierum collectiuarum claſſes facio: prima eas ſeries continet quarum differentia originales omnes praeter primam, nihilo aequales ſunt; has ſeries voco puras. Altera claſſis continet ſeries mixtas, quarum differentiae originales ſunt numeri quicunque. Ad poſteriorem claſſem exempla antecedentia pertinent. Prioris exemplum mox ſequetur.

6. Vt collectiuarum ſerierum natura manifeſta fiat, incipio a ſeriebus puris. Has omnes vnica complecti licet ſerie vniuerſali, quae quidem hunc in modum inuenitur: Aſſumatur prima differentia originalis $=a$. et cum reliquae omnes ſint nihilo aequales (§. 5.) datae eae iam ſunt, quarum ope ſeries cuiuslibet ordinis conſtruere licet (§. 3. et 4.) Conſtructis aliquot eiusmodi ſeriebus, quotientes inter duos terminos vicinos quoslibet, diuidendo ſequentem in antecedentem, inquiro, eosque binis ſuis terminis interpono, vti ſequitur.

Radi-

Radices	0		1		2		3		4		5		6
1	a	1	a	1	a	1	a	1	a	1	a	1	a
2	0	$\frac{1}{0}$	a	2	$2a$	$1\frac{1}{2}$	$3a$	$1\frac{1}{3}$	$4a$	$1\frac{1}{4}$	$5a$	$1\frac{1}{5}$	$6a$
3	0	$\frac{1}{0}$	a	3	$3a$	2	$6a$	$1\frac{2}{3}$	$10a$	$1\frac{2}{4}$	$15a$	$1\frac{2}{5}$	$21a$
4	0	$\frac{1}{0}$	a	4	$4a$	$2\frac{1}{2}$	$10a$	2	$20a$	$1\frac{3}{4}$	$35a$	$1\frac{3}{5}$	$56a$
5	0	$\frac{1}{0}$	a	5	$5a$	3	$15a$	$2\frac{1}{3}$	$35a$	2	$70a$	$1\frac{4}{5}$	$126a$
6	0	$\frac{1}{0}$	a	6	$6a$	$3\frac{1}{2}$	$21a$	$2\frac{2}{3}$	$56a$	$2\frac{1}{4}$	$126a$	2	$252a$

Primo ſtatim intuitu apparet quotientes hos progredi in ſeriebus aequidifferentibus : ex. gr. ſeries quotientum inter primos et ſecundos haec eſt :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \ldots$$

inter ſecundos et tertios

$$1 \quad 1\tfrac{1}{2} \quad 2 \quad 2\tfrac{1}{2} \quad 3 \quad 3\tfrac{1}{2} \quad 4 \quad 4\tfrac{1}{2} \quad 5 \quad 5\tfrac{1}{2}$$

inter tertios et quartos

$$1 \quad 1\tfrac{1}{3} \quad 1\tfrac{2}{3} \quad 2 \quad 2\tfrac{1}{3} \quad 2\tfrac{2}{3} \quad 3 \quad 3\tfrac{1}{3} \quad 3\tfrac{2}{3} \quad 4$$

inter quartos et quintos

$$1 \quad 1\tfrac{1}{4} \quad 1\tfrac{2}{4} \quad 1\tfrac{3}{4} \quad 2 \quad 2\tfrac{1}{4} \quad 2\tfrac{2}{4} \quad 2\tfrac{3}{4} \quad 3 \quad 3\tfrac{1}{4}$$

has quotientum ſeries vnica generali ſerie exhibeo : Poſita enim quauis radice antecedente (in ſeriebus collectiuis) $= x$ erit differentia, qua progrediuntur ſeries quotientum, aequalis $\frac{1}{x}$ (quod inductione patet) : Et quia omnes ab vnitate incipiunt habetur generalis quotientum ſeries ſequens :

$$1 \quad 1+\frac{1}{x} \quad 1+\frac{2}{x} \quad 1+\frac{3}{x} \quad 1+\frac{4}{x} \quad 1+\frac{5}{x} \ldots$$

ſiue haec :

$$1 \quad \frac{x+1}{x} \quad \frac{x+2}{x} \quad \frac{x+3}{x} \quad \frac{x+4}{x} \quad \frac{x+5}{x} \ldots$$

Pona-

Ponatur praeterea exponens cuiusuis termini in ſerie hac aequalis literae n. (qui quidem exponens idem eſt cum indice ſerierum collectiuarum generali), habebitur ſic generalis expreſſio cuiusuis quotientis haec: $\frac{x+n-1}{x}$. Dato itaque termino quouis antecedente, in aliqua ſerie collectiua, ſequens terminus habetur quoque, is enim eſt factum ex antecedente et quotiente intermedio dato. Si ergo primus terminus in ſerie collectiua vniuerſali ſtatuatur $=a$ et index ſeriei $=n$. ipſa ſeries per regulam inuentam emergit talis:

$$a.\ \frac{n}{1}a\cdot\ \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}a.\quad \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}a.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Huius ſeriei continuandae lex ſtatim in oculos incurrit. Q. E. I.

7. Poſita radice generali ſeriei praecedentis $=x$. erit generalis formula cuiusuis termini puri $=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{n+x-2}{x-1}a$ quod facile intelligitur attendendo ad priora. Vel ſi formula inuertatur, habebitur

$$\frac{n+x-2}{x-1}.\frac{n+x-3}{x-2}.\frac{n+x-4}{x-3}.\frac{n+x-5}{x-4}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{n}{1}a.$$

8. Si generalis index ($=n$) determinetur formula finita euadit. Ex. gr. ſit $n=4$ ſic terminus generalis cuiusuis ſeriei purae quarti ordinis fiet $=\frac{x+2}{x-1}.\frac{x+1}{x-2}.\frac{x}{x-3}.\frac{x-1}{x-4}.\frac{x-2}{x-5}.\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{4}{1}.a.$

quae ſi deprimatur, delendo aequales factores ſupra et infra, habebitur ea$=\frac{x+2}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x}{3}a$. Hoc modo inuenitur terminus generalis ſeriei purae ordinis

Primi	$= a$
Secundi	$= a.\frac{x}{1}.$
Tertii	$= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}$
Quarti	$= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.$
Quinti	$= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\frac{x+3}{4}.$
Sexti	$= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\frac{x+3}{4}.\frac{x+4}{5}.$
Indefiniti	$= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}\ldots\ldots\frac{x+n-2}{n-1}.$

Atque hic terminus indefiniti ordinis forma diſfert ab eo quem dedi ſupra (§. 7.) ceterum vltro patet quomodo hic indefinitus terminus Inductionis ope a praecedentibus definitis abſtractus fuerit.

9. Progredior ad ſeries mixtas. Harum terminos vniuerſaliter expreſſos ſic inueſtigaui : Asſumſi differentias originales indefinitas, primam ſc.$=a.$ ſecundam $=b.$ reliquas ſuo ordine $=c,=d,=e,$ &c. ex hiſce ſeries formaui mixtas generales eo modo qui deſcribitur ſupra (§. 3. et 4.) quem et ſequens exemplum exhibet:

Radices	0	1	2	3	4
1	a	a	a	a	a
2	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$
3	c	$a+b+c$	$3a+2b+c$	$6a+3b+c$	$10a+4b+c$

Intellexi autem tam ex ipſa generatione ſerierum, quam ex intuitu terminorum, quod quilibet terminus mixtus conflatus ſit ex tot terminis puris, quot index ſeriei vnitates habet, primus quidem terminus purus pertinet ad ſeriem puram cuius differentia originalis eſt $=a.$ eiusque index idem eſt cum indice ſeriei mixtae (ponatur ille $=n$) ſecundus terminus

minus purus pertinet ad ſeriem puram cuius diff. orig. eſt $=b$. et cuius index eſt $=n-1$. Tertius purus oritur ex tertia differ. orig. $=c$ et indice $=n-2$. Atque hoc ordine reliqui. Hac lege cognita facile erat componere ex terminis puris generalibus (§. 8.) terminos generales mixtos ſequentes: ſc. pro ordine

Primo $= a$

Secundo $= a\frac{x}{1} + b$.

Tertio $= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}. + b\frac{x}{1} + c$

Quarto $= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3} + b\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}. + c\frac{x}{1} + d$.

Quinto $= a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\frac{x+3}{4} + b\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3} + c\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}. + d\frac{x}{1} + e$.

Imo et pro ordine indefinito generalis forma conditur, ponendo vltimam differentiam originalem $=$M. penultimam $=$N. reliquasque ſuo ordine antecedentes $=$P $=$Q $=$R etc. Ea enim ob legem quam ſeruant ordines definiti, talis erit: $M + N\frac{x}{1} + P\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2} + Q\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3} + R.\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\frac{x+3}{4}$ ....&c.

10. Termini hi aliam acquirunt formam ſi factores indicati actu in ſe ducantur, erit enim generalis terminus ordinis

Primi $= a$

Secundi $= ax + b$

Tertii $= \frac{a}{2}x^2 + \frac{a+2b}{2}x + c$.

Quarti $= \frac{a}{6}x^3 + \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{2a+3b+6c}{6}x + d$.

Quinti $= \frac{a}{24}x^4 + \frac{3a+2b}{12}x^3 + \frac{11a+12b+12c}{24}x^2 + \frac{6a+3b+12c+24d}{24}x + e$

vel paulo aliter ita

 Pri-

Primi $= a$

Secundi $= ax + b$

Tertii $= \frac{a}{1.2}x^2 + \left.\begin{array}{l}\frac{a}{1.2}\\ +b\end{array}\right\} x + c.$

Quarti $= \frac{a}{1.2.3.}x^3 + \left.\begin{array}{l}\frac{3a}{1.2.3.}\\ +\frac{b}{1.2}\end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l}\frac{2a}{1.2.3.}\\ +\frac{b}{1.2}\\ +c\end{array}\right\} x + d.$

Hae poſteriores formulae legem obſeruant, qua reliquae altiores ex prioribus gignuntur. Ex. gr. ſi formulam quinti ordinis condere velim, ex ſolo intuitu formularum praecedentium iudico, eam talem futuram eſſe

$$\frac{a}{1.2.3.4.}x^4 \left.\begin{array}{l}\frac{*a}{1.2.3.4.}\\ +\frac{*b}{1.2.3.}\end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{l}\frac{*a}{1.2.3.4.}\\ +\frac{*b}{1.2.3.}\\ +\frac{*c}{1.2.}\end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l}\frac{*a}{1.2.3.4.}\\ +\frac{*b}{1.2.3.}\\ +\frac{*c}{1.2.}\\ \;d\end{array}\right\} x + e$$

vbi ſtellulas poſui (*), ibi deſunt coëfficientes numerici, quorum natura non tam clare in oculos incurrit, quam ceterorum leges. Hos autem numeros excerpendos eſſe ex ſeriebus ſequentibus mox oſtendam. Series autem iſtae omnes ab vnitate incipiunt, et lex qua generantur exprimitur hac formula: A $(n + r - 2) + S$. quae quidem exprimit naturam cuiusuis termini ſequentis, A eſt terminus quaeſitus antecedens, S eſt ſequentis, ſeu quaeſiti, ſuperſtans, n. eſt ſeriei exponens, r. eſt termini ſequentis ſeu quaeſiti exponens. Ecce ſeries aliquot

Ter-

Serierum exponentes \ Terminorum exponentes =	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	6	24	120
2	1	3	11	50	274	
3	1	6	35	225	1624	
4	1	10	85	735	6769	
5	1	15	175	1960		
6	1	21	322			
7	1	28				

transuerſales lineae punctulatae modum excerpendi numeros coëfficientes indicant, ſic numeri inter transuerſales tertiam et quartam ſunt coëfficientes omnium. *a*. in formula praecedente. Inter transuerſales ſecundam et tertiam habentur coëfficientes omnium. *b*. atque ita deinceps; vnde formula integra talis emergit:

$$\frac{a}{1.2.3.4}x^4 + \left.\begin{matrix}\frac{6a}{1.2.3.4}\\ \frac{b}{1.2.3}\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}\frac{11a}{1.2.3.4}\\ +\frac{3b}{1.2.3}\\ +\frac{c}{1.2.}\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}\frac{6a}{1.2.3.4}\\ +\frac{2b}{1.2.3.}\\ +\frac{c}{1.2.}\\ +d\end{matrix}\right\} x + e$$

11. Omnes praecedentes formulae ſub vniverſali hac comprehenduntur : $px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} + \ldots$ et viciſſim, omnes formulae quae ſub hac vniuerſali formula continentur, ſunt termini ſerierum collectiuarum generales.

12. Hic occurrit problema ſequens ſoluendum : Dato termino aliquo generali ſeriei collectiuae, deſcribere ipſam ſeriem per ſolam additionem continuatam. Sit ex. gr. propoſita haec formula : $2x^3 + 5x^2 - 3x - 7$. Id vltro apparet, ſi in formula ſucceſſiue ſubſtituantur pro. x. numeri 0, 1, 2, 3, 4, &c. prodituram eſſe ſeriem quaeſitam; verum problema poſtulat vt ſeries per additionem prodeat ; Hunc finem duplici modo obtinere licet. Primus eſt, ſi per ſubſtitutionem dictam obtineantur tot prioris ſeriei termini, quot maxima radicis dignitas vnitate aucta vnitates continet ; in praeſenti exemplo ergo quatuor ſunt obtinendi, nimirum hi : $-7. -3. 23. 38.$ hos terminos ſibi oportet mutuo ſubtrahere, praecedentem quemlibet a ſuo ſequente, reſiduum quoduis ponatur ſupra terminum ſequentem : Eodem modo ſubtrahantur quoque a ſe inuicem reſidua et reſiduorum reſidua, quousque licet ; ecce typum calculi !

			12
		22	34
	4	26	60
-7	-3.	23.	83

Cum haec ſubtractio nihil ſit niſi reſolutio ſeriei collectiuae in ſuas ordine priores, (quod intelligitur ex §. 3.) patet vltimum reſiduum (hic. 12.) eſſe terminum ſeriei primae qui per totam ſeriem idem eſt. (§. 3.) habetur ergo ſeries prima, et ex ſeriebus ſuccedentibus habentur quoque aliquot termini, quorum conſequenter ope omnes ſeries adeoque et ſeries quaeſita per ſolam additionem prorſum et retrorſum continuantur (per §. 3. et 4.). Calculus ergo erit talis:

Radices	− 2	− 1	0	1	2	3	4	5
	12	12	12	12	12	12	12	12
	−26	−14	− 2	10	22	34	46	58
	10	− 4	− 6	4	26	60	106	164
	5	1	− 7	−3	23	83	189	353

13. Alter modus hic eſt: Conferatur propoſita formula cum formula vniuerſali correſpondenti (§. 10.) aequationibusque inter coëfficientes eosdem pro more inſtitutis, eliciantur valores differentiarum originalium. Sic propoſita noſtra formula $2x^3+5x^2-3x-7$ conferenda eſt cum vniuerſali formula quarti ordinis, inde fiet

$\frac{a}{6}=2$ adeoque $a=12$.

$\frac{a+b}{2}=\frac{12+b}{2}=6+\frac{1}{2}b=5$ adeoque $b=-2$.

$\frac{2a+3b+6c}{6}=\frac{24-6+6c}{6}=3+c=-3$ adeoque $c=-b$

$d=-7$.

haben-

habentur ergo differentiae originales 12, 2, −6, −7. quarum ope deſiderata ſeries adornatur (per §. 3 et 4.)

14. Commoditatis gratia, ne in ſingulis caſibus operoſa opus ſit inueſtigatione differentiarum originalium, poſſunt illae generaliter determinari pro formula magis generali ordinis ſecundi

$$px+q\begin{cases}a=p\\b=q\end{cases}$$

pro formula ordinis tertii px^2+qx+r habetur

$a=1.2p$
$b=q-p$
$c=r.$

pro formula ordinis quarti px^3+qx^2+rx+s habetur

$a=1.2.3p$
$b=(q-3p)1.2.$
$c=r-q+p.$
$d=s$

pro formula ordinis quinti $px^4+qx^3+rx^2+sx+t$, habetur

$a=1.2.3.4.p.$
$b=1.2.3(q-6p)$
$c=1.2.(r-3q+7p)$
$d=1.(ſ-r+q-p)$
$e=t.$

15. Cui volupe eſt continuare tabellam hanc pro altioribus formulis, is ex contemplatione datorum perſpiciet continuandi legem vltro in oculos incurrere (ſi numeros coëfficientes excipias.) Nam ſi pro formula ordinis ſexti hac, $px^5+qx^4+rx^3$

+

$+ sx^2 + tx + v$ valores differentiarum originalium habere velis apparet eos tales eſſe debere.

$$a = 1.2.3.4.5.p.$$
$$b = 1.2.3.4.(q - {*}p)$$
$$c = 1.2.3.(r - {*}q + {*}p)$$
$$d = 1.2.(s - {*}r + {*}q - {*}p)$$
$$e = 1.(t - ſ + r - q + p)$$
$$f = v.$$

Vbi ſtellulas poſui, ibi numeri ex ſequentibus numerorum ſeriebus ſubſtituendi ſunt.

Exponentes terminorum		1	2	3	4	5	6
Exponentes ſerierum.	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	3	7	15	31	63
	3	1	6	25	90	301	966
	4	1	10	65	350	1701	

nimirum ex prima ſerie excerpuntur numeri coëfficientes pro differ. orig. penultima (hoc eſt vnitates) ex ſecunda habentur numeri pro antepenultima et ſic deinceps. Ceterum natura harum ſerierum ab vnitate incipientium explicatur per formulam hanc: $Ar + S$. vbi formula ipſa deſignat quemvis terminum quaeſitum ſeu ſequentem, A, antecedentem, S ſequentis ſuperſtantem et r. exponentem ſeriei. Valores igitur differentiarum originalium ordinis ſexti ſunt ſequentes

$a = 1.2.3.4.5p$
$b = 1.2.3.4(q-10p)$
$c = 1.2.3(r-6q+25p)$
$d = 1.2(s-3r+7q-15p)$
$e = 1.(t-s+r-q+p)$
$f = v$

16. Ex dictis intelligitur quomodo tabellae pro numerorum integrorum potentiis quibuslibet concinnari debeant per ſolam additionem continuatam. Si, ex. gr., biquadratorum omnium ſeries adornanda foret, quorum formula generalis eſt $= x^4$. video eam pertinere ad formulam ſerierum collectiuarum magis generalem quinti ordinis hanc: $px^4+qx^3+rx^2+sx+t$. in qua conſequenter eſt $p=1$. $q=r=s=t=0$. et differentiae originales per §. 14. fient

$a = 1.2.3.4 \quad = \quad 24$
$b = 1.2.3(-6) \quad = \quad -36$
$c = 1.2(+7.) \quad = \quad 14$
$d = 1(-1) \quad = \quad -1$
$e = 0. \quad = \quad 1$

quibus datis ipſum quaeſitum obtinetur per §. 3. hoc modo

Radices ...	0	1	2	3	4	5	6
	24	24	24	24	24	24	24
	−36	−12	12	36	60	84	108
	14	2	14	50	110	194	302
Series	−1	1	15	65	175	369	671
quaeſitae =	0	1	16	81	256	625	1269

CA-

CAPVT II.

De Summatione Serierum collectiuarum.

17. SI alicuius ſeriei collectiuae differentia originalis nihilo aequalis eſt, quilibet terminus in ea ſerie erit ſumma omnium terminorum qui ſunt in ſerie prioris ordinis: Ex. gr. ſit

Radices		0	1	2	3	4	5
Prior ſeries	=	0	5	18	42	80	135
Poſterior	=	0	5	23	65	145	280

Quartus terminus in ſerie poſteriori 145 eſt $= 80 + 52 + 18 + 5$. hoc eſt, aequatur ſummae omnium quatuor terminorum prioris ſeriei; id quod intelligitur ex conſtructione ipſarum ſerierum (§. 3.)

18. Quod ſi ergo formula alicuius ſeriei generalis proponatur, transmutetur illa in formulam ſequentis ſeriei in qua vltima differentia originalis nihilo aequanda eſt, ſic haec noua formula erit prioris ſummatrix. Ex. gr. ſit propoſita haec ſeries. 5. 11. 19. 29. 41. 55. 71. 89. cuius generalis terminus eſt $= x^2 + 3x + 1$ pertinens ad generaliorem formulam tertii generis $(\frac{a}{2}x^2 + \frac{a+2b}{2}x + c)$, erit proinde hoc in caſu $a = 2$, $b = 2$ et $c = 1$. Quarti autem generis formula eſt $\frac{a}{6}x^3 + \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{2a+3b+6c}{6}x + o$. ſubſtitutis ergo ſubſtituendis habebitur ſummatrix $= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x = \frac{x^3 + 6x^2 + 8x}{3}$. Verbi gratia, ſi ſumma ſeptem priorum terminorum expetatur, fiat in formula $x = 7$. vt abeat in $\frac{7^3 + 6.7^2 + 8.7}{3.}$

$= \frac{343+294+56}{3} = \frac{693}{3} = 231$. quae eſt ſumma quaeſita.

19. Imo ſi generalioris huius formulae $px^2 + qx + qr$ expetatur ſummatrix, erit, per §. 14. $a = 2p$ $b = q-p$, et $c = r$. quibus in poſteriore formula ſubſtitutis habebitur ſummatrix $= \frac{2px^3 + 3(p+q)x^2 + (p+3q+6r)x}{6}$. Hoc modo erit etiam $\int(px+q) = \frac{px^2 + (p+2q)x}{2}$. item $\int(px^3 + qx^2 + rx + s)$ erit $= \frac{3px^4 + 2(3p+2q)x^3 - 3(p+2q+2r)x^2 + 2(q+3r+6s)x}{12}$. Poſſet prolixior talium ſummatricium tabula concinnari, ſi ea opus eſſet.

20. Cum progreſſio arithmetica vulgaris nil aliud ſit quam ſeries collectiua ſecundi ordinis in qua primus terminus eſt $= a+b$ et differentia terminorum $= a$. ponatur primus terminus $= m$. vt fiat $b = m-a$ adeoque generalis formula omnium terminorum (per §. 10) $ax + m - a$; ſic prodibit ſubſtitutione legitima facta, ſummatrix progreſſionum arithmeticarum, (per §. 19) $= \frac{ax^2 + (2m-a)x}{2}$ quae vulgo iam nota eſt.

21. Summatio potentiarum non niſi caſus ſpecialis eſt eorum quae ante (§. 19.) dicta ſunt. Ex. gr. ſummatrix omnium cuborum erit

$$= \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{12} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}$$

Cuborum enim formula oritur ex generaliori hac $px^3 + qx^2 + rx + s$ ponendo $p = 1$ $q = r = s = 0$ ſubſtitutis igitur hiſce valoribus litterarum p, q, r, s. in ſum-

ſummatrice ſupra (§. 19.) data, emergit inde ſummatrix cuborum quaeſita. Hoc problema difficultatem alioquin habere ſolet, hic vero eius ſolutio breuis eſt et facilis.

22. Si res tanti foret, poſſem hic quoque modum explicare ſummandi ipſas ſummarum quarumcunque ſummas. Cui volupe eſt rem penitus inquirere, is inueniet in ante dictis quae huc faciunt.

CAPVT III.

De Vſibus nonnullis ſerierum collectiuarum.

23. SI Aequationes Algebraicae contineant radices integris numeris aequales, ope ſerierum collectiuarum eas detegere licet. Si vero radices fuerint numeri irrationales, limites earum vnitate differentes aſſignari poſſunt, idque ſequenti modo:

24. Omnis Aequatio Algebraica ſub hac vniverſali comprehenditur formula, $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \ldots = A$. Igitur aequationis pars ſiniſtra ſiue incognita nil aliud eſt quam terminus generalis ſeriei alicuius collectiuae, quod patet ex §. 11. Pars conſequenter dextra ſiue cognita (quia priori aequalis eſt) eſt terminus aliquis particularis ſeriei illius, qui ſi exacte inueniatur in ſerie deſcripta, exacta ſimul datur eius radix; ſi vero quam proxime inueniatur, et ipſa radix talis erit. So-

lutio ergo problematis in eo breuiter conſiſtit, vt pro parte aequationis ſiniſtra deſcribatur ſeries collectiua, (per §§. 12. 13. 14.) In deſcripta ſerie quaeratur pars aequationis dextra vna cum ſupra ſcripta radice: ſic inuenitur quod quaerebatur.

25. Res exemplo digna eſt; ſit propoſita aequatio: $x^5+x^4-37x^3-71x^2+346x+840=0$. Siniſtra pars aequationis eſt terminus generalis ſeriei collectiuae alicuius ſexti ordinis; Eius igitur differentiae originales inueniantur per §. 15. vbi ponatur $p=1 \cdot q=1 . r=-37 ſ=-71 . t=346$, et $v=840$. vt emergat $a=120$. $b=-216$ $c.=-108$. $d=64$. $e=380$. et $f=840$.

quarum ope ſequens conſtruatur ſeries:

Radices	-5,	-4,	-3,	-2,	-1	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
	-816	-696	-576	-456	-336	-216	-96	24	144	264	384	504
	2172	1476	900	444	108	-108	-204	-108	-36	228	612	1116
	-2756	-1280	-380	64	172	64	-140	-320	-356	-128	484	1600
	820	-460	80	144	316	380	240	-80	-436	-564	-80	1520
	380	-80	0	144	460	840	1080	1000	564	0	-80	1440
	*	*	*							*	*	*

Sub radicibus +4 et −3. inuenitur pars dextra aequationis exacte, hae ergo radices ſunt integrae et exactae. Inter radices 5 et 6 exiſtit pars aequationis quoque quia ſub 5ta eſt −80 et ſub 6ta eſt +1440 ab vno autem ad alterum terminum tranſitus non fit niſi eundo per 0. nihilum ita intercipitur, ergo et radix eius intercipitur inter 5 et 6. Idem intellige de duabus radicibus −5 et −4 quas inter alia aequationis radix ambigit.

26. Si radices magnae ſunt, magnae quoque requiruntur ſeries, quae taedioſum calculum pariunt;

riunt; ſed notandum eſt non eſſe neceſſe vt ſeries a primis radicibus inchoetur, poteſt ea vbique inchoari, per artificium quod innui §. 12mo adeoque calculus contrahi. Poteſt etiam aequatio transmutari in aliam quae minores radices contineat. Haec monuiſſe ſufficit.

27. Series interdum tot radices non detegit quot aequatio gradus habet, quod tamen fieri debebat. Hoc autem indicio eſt in aequatione contineri radices aut aequales aut imaginarias; has deteges, ſi aequationem diuidas per radices inuentas, et pro noua aequatione, quae prodit, nouas deſcribas ſeries hae enim detegent aequales, ſi adſint; aut, ſi imaginariae adſint, nullas detegent. Res tanti non eſt vt exemplo illuſtretur.

28. Niſi laborioſus nimium foret, oſtenderem quoque modum quo limites radicum non integrarum tam propinqui, quam quis cuperet, inueniri poſſunt. Nititur ille transmutatione aequationis in aliam cuius radix prioris multipla eſt, pro qua ſeriem collectiuam conſtruere oportet. Tentet id qui volet.

29. Alter harum ſerierum vſus eſt quem praeſtant in theorematibus vniuerſalibus adornandis. Neceſſe eſt interdum ex pluribus formulis ſpecialibus vniuerſalem conficere, vbi numeri qui quantitatibus indefinitis adhaerent difficulter ad vniuerſalitatem reuocantur. Quod ſi contingat vt tales numeri (quos vncias vocant aliqui) ſint ex genere collectiuorum, modum nunc oſtendam quo illi vniverſales reddi poſſint.

30. Ex-

30. Exemplo vnico omnia declarabo : Sit theorema inueniendum quo quantitas bimembris $(a+b)$ ad dignitatem indefinitam euehitur. Conſcribantur ab initio in forma tabellae aliquot definitae dignitates eiusdem quantitatis hunc fere in modum :

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4$
$+b^5$

$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4$
$+6ab^5+b^6$

Deinde conferantur inter ſeſe hae dignitates, vt appareat qua lege vna ex altera progignatur : Hic in praeſente caſu pars huius legis mox in oculos incurrit ; neglectis enim numeris, intelligitur indefinitam dignitatem ſic exprimendam eſſe

$(a+b)^m = a^m+ma^{m-1}b+{*}a^{m-2}b^2+{*}a^{m-2}b^3+$

reſtat ita hoc ſolum, vt numeri coefficientes (quorum loca ſtellulis expleui) generaliter exprimantur quoque.

31. Videndum igitur eſt vtrumne tales numeri pertineant ad ſeries collectiuas ? Id vero deprehenditur, ſi eorum ſeries reſoluatur eo modo quem ſupra (§. 12) oſtendi : nam ſi vltima reſidua huius reſolutionis omnia fiant aequalia, id indicio eſt, numerus conſtituere ſeriem collectiuam : Ex. gr. numeri qui tertia potentiarum membra afficiunt ſic reſoluantur :

		1	1	1
	2	3	4	5
1	3	6	10	15

Vltima hic reſidua ſunt omnia aequalia, conſtituunt ergo ſeriem collectiuam ordinis primi (§. 3.)

32. Hoc cognito, ſeries inuentae retroagantur, vt appareat quae ſit earum differentiae originalis (§.4.) hoc fere modo:

Radices	0	1	2	3	4	5
	1	1	1 /	1	1	1
			/			
	0	1 /	2	3	4	5
		/				
	0 /	1	3	6	10	15

ſic obſeruo, quod ſeries numerorum horum conſtituant ſeriem tertii ordinis puri (§. 5.) in quibus $a = 1$. quarumque conſequenter formula generalis eſt $= \frac{x}{1} \cdot \frac{x+1}{2}$ (§. 8.)

33. Atque ita obtinui horum numerorum expreſſionem generalem deſideratam. Video autem praeterea ex tabula ſuperiori (§. 39.) quod primus ſeriei terminus pertineat ad potentiam ſecundam; ſecundus ad tertiam, tertius ad quartam; et poſito exponente potentiae $= m$. quod radix ſeriei ſit $= m - 1$. fiat ergo $x = m - 1$ vt formula numerorum abeat in hanc $\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m}{2}$.

34. Eodem prorſus modo inueniuntur et reliqui coefficientes indeterminati; paucis autem inventis, lex innoteſcit protinus qua reliqui in infi-

nitum progrediuntur formula itaque generalis quaeſita erit

$$a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 + .$$

35. Sufficit vnicum hoc attuliſſe exemplum; erit vt alia data occaſione plura et difficiliora forſan in medium proferam , quae vtilitatem huius theoriae magis commendent.

36. Tertio, ad interpolationes accuratiores multum faciunt ſeries collectiuae. Numerorum enim ſeries, inter quos alii interpolandi ſunt, conſiderantur tanquam collectiuae, et reſoluuntur in ſuas priores, vti ſupra factum eſt (§. 12. et 40.) poſtea indagantur differentiae originales ex quibus formula generalis conditur (vti antea §. 42.) quae non tantum propoſitos numeros ſub ſe complectitur, ſed et quoslibet intermedios.

37. Exemplo vnico totum artificium diſpaleſcet. Sint dati tres numeri 5. 7. 11. inſtituetur igitur eius reſolutio et ſimul differentiarum originalium inuentio vti ſequitur.

Radices	0	1	2	3
Differentiae originales.	2	2	2	2
	− 2	0	2	4
	5	5	7	11

Vltimum reſidum habeatur pro termino ſeriei ordinis primi, cuius ope ſeries retroaguntur et differentiae originales inueniuntur (§. 4.) quibus datis, gene-

generalis formula vltro ſequitur per ea quae ante dixi (§. 10.) nimirum talis $x^2 - x + 5$. iam ſi inter binos numeros vnicus interpolandus ſit, ſubſtituatur in formula pro x ſucceſſiue $1\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{2}$ vt prodeant duo intermedii quaeſiti, primus $5\frac{3}{4}$ et ſecundus $8\frac{3}{4}$. Si duo inter binos interpolandi ſint, ſubſtituatur pro x ſucceſſiue $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$,. ſic emergent intermedii quaeſiti iterum. Idem ſuo modo intelligas de tribus, quatuor et pluribus interpolandis.

38. Imperfectus tamen eſt hic interpolandi modus, valet enim tantum in eis caſibus vbi exponentes ſiue radices numerorum interpolandorum progrediuntur per differentias aequales, quemadmodum etiam radices ſerierum collectiuarum progredi ſolent. Verum, quid ſi inaequaliter differant radices? Pro hoc caſu alium modum excogitaui, quem ſuo tempore vna cum inſigni vſu quem praeſtat, communicabo.

39. Quarto etiam ad vſus ſerierum collectivarum refero, quod earum ope tota vulgaris Arithmetica figurata breuiter tradi et facile intelligi poſſit. Subtilia ſunt, prolixa ſimul et perplexa quae a veteribus de numeris figuratis accepimus, et quod paulo peius eſſe videtur, nullum fere vſum figuratorum numerorum oſtenderunt, niſi qui forſan ad ingenium exercendum ſpectat. Si quis tamen ſit cui ſint in deliciis, is ad ſequentia velit attendere.

40. Tota polygonorum et pyramidalium familia pertinet ad ſeries collectiuas illas, quarum differentia originalis prima ponitur $= a$. ſecunda $= 1 - a$, reliquae vero omnes $= 0$. In tertio ha-

 rum

rum ſerierum ordine continentur omnes polygoni numeri: In quarto pyramidales primi, in quinto pyramidales ſecundi, et ſic deinceps: Ergo tota haec familia generali formula exhibetur (§. 9.) quae ſequitur.

$a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\;.\;.\;\frac{x+n-1}{n}+(1-a)\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\;.\;.\;\frac{x+n-2}{n-1}.$

vbi x radicem ſiue latus numeri figurati ſignificat, et, n indicem ordinis ad quem figuratus numerus pertinet.

41. In ſpecie, quia Polygoni pertinent ad ordinem tertium (§. 48.) erit eorum formula $=a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.+(1-a)\frac{x}{1}$. Pyramidales primi erunt conſequenter $a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.+(1-a)\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}$. Pyramidales ſecundi $=a\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\frac{x+3}{4}+(1-a)\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}$: Et ſic porro.

42. Quod ſi fiat $a=1$. tum vocantur hi numeri triangulares, ſi $a=3$, vocantur quadrangulares, et in genere, ſi numerus angulorum ſit $=p$ erit $a=p-2$. hoc ergo valore ſubſtituto in formula figuratorum generali (§. 48.) fiet illa $=(p-2)\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\;\frac{x+n-2}{n-1}+(3-p)\frac{x}{1}\frac{x+1}{2}.\;\frac{x+n-3}{n-2}$.

43. Numeri triangulares formula exprimuntur omnium ſimpliciſſima, poſito enim $p=3$ habebitur omnium triangularium expreſſio $=\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}.\frac{x+3}{4}\;.\;.\;\frac{x+n-2}{n-1}$. In ſpecie autem poſito $n=3$ erunt polygoni triangulares $=\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}$. poſito $a=4$ erunt triangulares pyramidales primi $=\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}$. Et ſic deinceps. Collatis his expreſſionibus cum coef-

coefficientibus potentiarum bimembrium (§§. 41. 42. 43.) apparet illos eſſe numeros triangulares.

44. Eodem modo tractanda ſunt reliqua figuratorum genera ; Ex eorum definitionibus enim ſemper diſpaleſcit quales ſupponant differentias originales (§. 40.) quibus datis omnia reliqua vltro ſe produnt.

PROPOSITIONES CYCLOMETRICAE ALIQVOT.

Autore

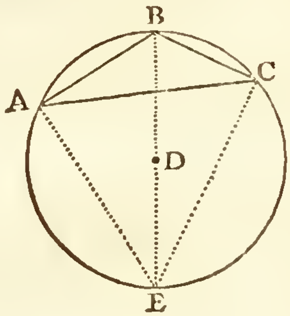
Frid. Chr. Maiero.

I.

PRomiſi nuper (videatur Diſſertatio de Arithm. figur. §. 35.) me plura ſuppeditaturum eſſe exempla quibus ſecundus vſus (§. 24. l. c.) ſerierum collectiuarum illuſtratur. M. Dec. 1726. Circulum igitur elegi , de quo nunc propoſitiones aliquot nouas partim, partim noua methodo elicitas proferre conſtitui. Dabo nimirum generale theorema chordarum pro arcubus multiplis et ſubmultiplis ; Ex hoc deducam aequationem generalem pro lateribus figurarum regularium ; tandem rectificationem circuli nouam forſan ex fundamentis praeiactis adornabo. Haec omnia qua potero perſpicua breuitate concipiam.

2. Pri-

2. Primum problema hoc eſto : Datis radio



circuli BD et arcuum AB , BC chordis. Inuenire chordam AC arcus AC ex prioribus arcubus datis compoſiti. Ponatur radius DE=BD=r. Chorda AB=a chorda BC=b. chorda quaeſita AC=x.Ducta diametro BE lineisque AE et CE , erunt anguli BAE et BCE recti , adeoque per Pythagorae theorema fiet linea AE=$\sqrt{(4r^2-a^2)}$ et CE=$\sqrt{(4r^2-b^2)}$ Exinde per theorema Ptolomaei habebitur

$$AB\times CE+BC\times AE=BE\times AC.$$

ſiue

$$a\sqrt{(4r^2-b^2)}+b\sqrt{(4r^2-a^2)}=2rx$$

conſequenter

$$\frac{a\sqrt{(4r^2-b^2)}+b\sqrt{(4r^2-a^2)}}{2r}=x. \text{ Q. E. I.}$$

3. Ex problemate priori pendet ſolutio ſequentis : Datis chorda arcus ſimpli et radio circuli; inuenire chordas arcuum multiplorum : fiat in priore problemate $a=b$ ſic obtinebitur chorda arcus dupli

pli $=x=\frac{a\sqrt{(4r^2-a^2)}}{r.}$, fiat porro $b=\frac{a\sqrt{(4r^2-a^2)}}{r.}$ ſic chorda arcus tripli emerget $\frac{3ar^2-a^3}{r^2}$, ſi fuerit $b=\frac{3ar^2-a^3}{r^2}$ habebitur chorda arcus quadrupli $=(2r^2a-r^3)\frac{\sqrt{(4r^2-a^2}}{r^3}$. Atque hoc modo pergere licet ad quoslibet arcus multiplos.

4. Quod ſi autem vniuerſalis formula deſideretur, quae omnes particulares multiplorum chordas continet, neceſſe eſt (vi methodi meae in diſſert. de Arith. figur. §§. 30. ſeqq. deſcriptae) aliquot formulas particulares in tabella ob oculos ponere, eius fere modi cuius ſequens eſt:

Chorda arcus

Simpli $=a.$

Dupli $=a\frac{\sqrt{(4r^2-a^2)}}{r}$

Tripli $=3a-\frac{a^3}{r^2}$

Quadrupli $=\left(\frac{2a}{r}-\frac{a^3}{r^3}\right)\sqrt{(4r^2-a^2)}$

Qnintupli $=5a-\frac{5a^3}{r^2}+\frac{a^5}{r^4}$

Haec tabella oſtendit multiplos pares aliam ſequi legem quam impares; iuuat ergo eam in duas diſpicere tabulas;

5. Prima ſit multiplorum imparium;

Eſt nempe chorda arcus

Sim-

Simpli $= a$

Tripli $= 3a - \frac{a^3}{r^2}$

Quintupli $= 5a - \frac{5a^3}{r^2} + \frac{a^5}{r^4}$

Septupli $= 7a - \frac{14a^3}{r^2} + \frac{7a^5}{r^4} - \frac{a^7}{r^6}$

Noncupli $= 9a - \frac{30a^3}{r^2} + \frac{27a^5}{r^4} - \frac{9a^7}{r^6} + \frac{a^9}{r^8}$

6. Primus tabellae huius intuitus legis partem aperit, qua vna formula alteram excipit; poſito enim multiplicatis indice $= m$ diſſimulatisque numeris coefficientibus, formula generalis erit $= ma - \frac{* a^3}{r^2} + \frac{* a^5}{r^4} - \frac{* a^7}{r^6} + \frac{* a^9}{r^8} . .$

7. Vt vero etiam lex numerorum coefficientium innoteſcat, diſpiciendum eſt vtrumne ſint collectiui generis? incipiamus a numeris ſecundorum membrorum (nam prima membra ducuntur ſimpliciter in multiplicitatis indicem) quorum ſeries talis eſt: 1. 5. 14. 30. 55. quae ſeries reſolui debet hoc modo:

			2	2
		5	7	9
	4	9	16	25
1	5	14	30	55

quoniam vltima reſidua aequalia fiunt, video ſeriem eſſe collectiuam.

8. Retroagatur itaque ſeries, vt differentiae ori-

originales pateſaciant, quarum ope formula generalis condi debet: ecce typum operationis.

Radices	0	1	2	3	4
Differentiae originales	2	2	2	2 /	2
	−1	1	3 /	5	7
	0	1 /	4	9	16
	0	/ 1	5	14	30

poſita iam radice $=x$ erit terminus ſeriei generalis $=2\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.\frac{x+2}{3}-\frac{x}{1}.\frac{x+1}{2}.$ ſicuti in priori meo ſcripto oſtendi.

9. Obſeruandum eſt praeterea, quod primus ſeriei terminus competat triplo arcui, ſecundus quintuplo, et ſic porro prout adiectae ſeries vlterius declarant;

Radices	1	2	3	4	5	6
Indices multipl.	3	5	7	9	11	13

difficile non eſt intelligere, quod index multipli quilibet vnitate minutus ſit duplus reſpondentis radicis; radix ergo poteſt determinari ex indice multipli, eo enim poſito $=m$ erit radix reſpondens $=\frac{m-1}{2}.$ quo valore in generali formula ſubſtituto habebitur coefficiens membrorum ſecundorum generalis quaeſitus $=2\frac{m-1}{2}.\frac{m+1}{4}.\frac{m+3}{6}-\frac{m-1}{2}.\frac{m+1}{4}.$ vel, ſi paulo immutetur $=\frac{m+1}{1}.\frac{\frac{m-1}{2}.\frac{m}{2}}{3.2}.$

10. Eodem prorſus modo inuenitur coefficiens

 mem-

membrorum tertiorum $= \frac{m+3}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m}{5.2^4}$.
quartorum $= \frac{m+5}{1}.\frac{m+3}{2}.\frac{m+1}{3}.\frac{m-1}{4}.\frac{m-3}{5}.\frac{m-5}{6}.\frac{m}{7.2^6}$.
Reliquorum membrorum natura ex conſideratione horum haud difficulter cognoſcitur.

11. Formula vero multiplorum imparium haec erit. $ma - \frac{m+1}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{ma^3}{3.2^2 r^2} + \frac{m+3}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{ma^5}{5.2^4 r^4}$ vel ponendo $2r = d$ diametro

$$ma - \frac{m+1}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{ma^3}{3d^2} + \frac{m+3}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{ma^5}{5d^4}$$

12 Non opus eſt ſigillatim recenſere quomodo formulam pro chordis multiplorum elicuerim, eodem enim omnia modo peraguntur quo iam dixi; formula autem pro paribus multiplis talis eſt :

$$\sqrt{(d^2-a^2)}\,\Big(\frac{ma}{d} - \frac{m+2}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{ma^3}{3d^3} + \frac{m+4}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-4}{4}.\frac{ma^5}{5.d^5} - \frac{m+6}{1}.\frac{m+4}{2}.\frac{m+2}{3}.\frac{m-2}{4}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-6}{6}.\frac{ma^7}{7.d^7} + \ldots\Big)$$

13 Quod ſi data fuerit chorda arcus multipli, quaeraturque arcus ſimpli, tum problema duplicem admittit ſolutionem : prima eſt, ſi ponatur chorda arcus ſimpli $= x$ index multiplicitatis $= m$ chorda arcus multipli data $= a$, ſic obtinebitur per priora aequatio pro multiplis imparibus

$$a = mx - \frac{m+1}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{mx^3}{3d^2} + \ldots \text{ (§. 10.)}$$

pro multiplis paribus

$a =$

$a = \sqrt{(d^2-x^2)}\ \left(\frac{mx}{d} - \frac{m+2}{1}.\frac{m-2}{2}.\frac{mx^3}{3d^3} + ..\right)$ (§. 12.)

quae aequationes in caſibus definitis abrumpuntur et finitae fiunt. Ex. gr. ſi in formula imparium fiat $m=3$ habebitur

$a = 3x - \frac{3+1}{1}.\frac{3-1}{2}.\frac{3x^3}{3d^2} + \frac{3+3}{1}.\ \frac{3+1}{2}.\frac{3-1}{3}.\ \frac{3-3}{4}.\frac{3x^5}{5d^4}.$

hoc eſt *ob* $3-3=o$.

$a = 3x - 4\frac{x^3}{d^2}$ ſiue $ad^2 = 3d^2x - 4x^3$ ſiue (quia $d^2 = 4r^2$) $ar^2 = 3r^2x - x^3$. ſiue $x^3 - 3x + ar^2 = o$ ex qua aequatione radix extrahenda eſt, vt habeatur chorda arcus ſubtripli.

14. Quoniam ſubtenſa quae totum circulum ſubtendit aequalis eſt nihilo, igitur ſi in aequationibus prioribus (§. 13.) ſtatuatur $a=o$ erit x chorda arcus totius peripheriae circularis ſubmultipli, hoc eſt, erit latus polygoni alicuius regularis: aequatio igitur pro omnibus polygonis imparibus, erit $o = m - \frac{m+1}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m}{3.2^2 r^2}x^2 + \frac{m+3}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m-1}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m}{5.2^4 r^4}x^4 -$ ponendo ſcilicet in ſuperiori formula (§. 13.) $d=2r$ eamque diuidendo in x. Sic et aequatio pro polygonis paribus emergit talis $o = m - \frac{m+2}{1}.\frac{m-2}{2}.\frac{m}{3.2^2 r^2}x^2 + \frac{m+4}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-4}{4}.\frac{m}{5.2^4 r^4}x^4 -$ diuidendo ſcilicet ſuperiorem aequationem (§. 13.) in $\sqrt{(d^2-x^2)}\frac{x}{d}$ et ponendo $d=2r$. Notandum vero eſt, quod hae aequationes abrumpantur in caſibus ſpecialibus.

15. Alter modus ſoluendi problema articulo 13. propoſitum, hac nititur conſideratione: Quoniam in formulis chordarum pro arcubus multiplis generalibus (§§. 11. 12.) index multiplicitatis ($=m$) adeo generalis eſt, vt per numerum quemcunque determinari poſſit, patet, ſi determinetur per fractionem, formulas abire in tales, quae chordas arcuum ſubmultiplas exhibent, quod quidem in problemate petitur. Fiat igitur in dictis formulis $m=\frac{1}{n}$ vt habeatur formula ſubmultiplorum imparium

$$=\frac{a}{n}+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{3n^3d^2}+\frac{3m+1}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\cdot\frac{3m-1}{4}\cdot\frac{a^5}{5\cdot m^5d^4}+\ldots$$

et ſubmultiplorum parium

$$\sqrt{(d^2-a^2)}\left(\frac{a}{nd}+\frac{2m+1}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\;\frac{a^3}{3n^3d^3}+\ldots\right)$$

ſed fatendum eſt has formulas incommodas nimis eſſe pro caſibus ſpecialibus, imo prorſus incongruas pro lateribus polygonorum determinandis. Alius autem finis eſt, propter quem eas huc adferre volui, ſcilicet propter ſolutionem problematis quod ſequitur.

16. Data diametro et chorda, inuenire arcum a chorda ſubtenſum. Si formulae arcuum ſubmultiplorum (§. 15.) ducantur in indicem multiplicitatis, manifeſtum eſt factum aequale fore ſummae omnium chordarum quas recipit multiplus arcus cuius chorda data fuit. Sic in formula ſubmultiplorum imparium ſumma omnium chordarum erit

$=a$

$$=a+\frac{n+1}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{a^3}{3.n^2d^2}+\frac{3n+1}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n-1}{3}.\frac{n3-1}{4}.$$

$\frac{a^5}{5n^4d^4}+\ldots$ iam ſi index multipli ($=n$) fiat infinite multus, ſumma haec aequalis erit ipſi arcui cui chorda data ſubtenditur. Hoc autem caſu vnitas quae additur aut demitur indici infinito in coefficientibus ($\frac{n+1}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n-1}{3}$ &c.) euaneſcit, indicis enim reſpectu nihil eſt; abit itaque formula in hanc.

$$a+\frac{a^3}{1.2.3.d^3}+\frac{3^2a^5}{1.2.3.4.5.d^4}+\frac{3.^2 5.^2 a^7}{1.2.3.4.5.6.7.d^7}$$

$$+\frac{3.^2 5.^2 7.^2 a^9}{1.2.3\ldots 9.d^8}+\ldots \text{ vel}$$

$$a+\frac{a^3}{2.3.d^2}+\frac{3a^5}{2.4.5.d^4}+\frac{3.5.a^7}{2.4.6.7.d^6}+\frac{3.5.7a^9}{2.4.6.8.9.d^8}+\ldots$$

cuius progrediendi lex intuenti mox apparet. Atque hac ſerie infinita exprimitur quantitas arcus quaeſita. Q. E. I.

17. Iam difficile non eſt rectificari peripheriam circuli multis modis; vnicum adferam qui mihi maxime idoneus eſſe videtur. Cum ſexta pars peripheriae circularis ſubtendatur a ſemidiametro, fiat in priori formula (§. 16.) $a=\frac{1}{2}d.=r.$ vt in hanc degeneret.

$$r+\frac{r}{2.3.2^2}+\frac{3r}{2.4\,5.2^4}+\frac{3.5.r}{2.4\,6.7.2^6}+\frac{3.5.7.r}{2\,4.6.8.9\,2^8}+\ldots$$

quae quidem aequalis eſt ſextanti peripheriae circularis. Si inſuper ducatur in ſenarium, producetur ſeries qua integra circuli peripheria exprimitur, hoc modo:

$$6r + \frac{r}{4} + \frac{9.r}{320} + \frac{15.r}{3584} + \frac{105r}{147456} + \ldots$$

vel

$$6r + \frac{1^2 P}{2.3.4.} + \frac{3^2 P}{4.5.4.} + \frac{5^2 P}{6.7.4.} + \frac{7^2 P}{8.9.4.} + \frac{9^2 P}{10.11.4.} + \ldots$$

vbi P denotat quodlibet membrum praecedens. Haec ſeries calculo ſatis apta eſt; approximat etiam ita vt quodlibet eius membrum numerum prodeuntem vna nota augeat: Ex. gr. ſi quinque priora membra ſummentur, peripheria erit $= 6.2830$. (poſito $r = 1$) qui numerus quinque conſtat notis numericis.

METHODVS VNIVERSALIS

Determinandae curuaturae fili a potentiis quamcunque legem inter ſe obſervantibus extenſi, vna cum ſolutione problematum quorundam nouorum eo pertinentium.

Autore

Daniele Bernoulli I. F.

I.

MenſeFeb. 1728. Tab. III.

CVm filum extenditur a ſolis potentiis verticalibus aut ſolis normalibus ad curuam, facile lex quaedam vniformis inter potentias applicatas et angulorum quorundam ſinus perſpicitur, ita vt quamcunque habeant legem hae

hae potentiae poſſit curuatura fili ſemper aequatione differentiali ſecundi ordinis definiri, quae ſaepe ad ſimpliciter differentialem ſe reduci patitur: Ita catenaria, velaria, lintearia, elaſtica aliaeque curvae olim a ſummis Geometris fuerunt erutae. At ſi in vnoquoque fili puncto plures diuerſae potentiae ſub variis directionibus applicatae ſint, deficit illa vniformitas, neque aliter quam quantitatibus differentialibus tertii ordinis curuae proprietatem determinare poſſumus, ſi in generalibus ſubſiſtamus: Vt methodus mea, quae quidem pro hoc negotio generalis eſt, eo clarius perſpiciatur, fingam in vnoquoque fili puncto duas ſaltem potentias applicari; alteram ad curuam perpendicularem, alteram datum conſtantem angulum cum axe formantem, quae tamen lex ita late ſe extendit, vt omnes curuas hactenus a Geometris hac in re conſideratas, vt ſpecialiſſima exempla ſub ſe comprehendat. Poſtmodum problematum quorundam mihi primo conſideratorum ſolutionem oſtendam.

2. *Lemma* 1. Sit filum (fig. 1.) ABCD affixum punctis A et D diuiſumque in tres partes aequales AB, BC, CD. Intelligantur in punctis B et C applicatae potentiae BK et CI quarum directiones biſecent aequaliter angulos ABC et BCD: vt et potentiae BH et CL, quarum directiones ſunt inter ſe parallelae, erit productis lineis demiſſisque perpendicularibus quas figura oſtendit atque deſignatis potentiis BK, CI, BH et CL per A, B, C et D, erit

erit inquam $\frac{\text{ſin. ang. ABR}}{\text{ſin. ang. ABm}} A + \frac{\text{ſin. ang. ABM}}{\text{ſin. ang. ABm}} C = \frac{\text{ſin. ang. BCd}}{\text{ſin. ang. BCn}} B + \frac{\text{ſin. ang. DCX}}{\text{ſin. ang. BCn}} D$ ſeu ſumta $Ao = BC = CD$ pro ſinu toto, erit $\frac{AO}{Am} A + \frac{AM}{Am} C = \frac{Ba}{Bn} B + \frac{DX}{Bn} D$. Demonſtratio conſtat ex mechanicis atque facile deducitur ex compoſitione potentiarum, cuius ope determinantur potentiae punctum aliquod in BC aſſumtum verſus B et G trahentes, quae inter ſe debent eſſe aequales.

3. *Lemma* 2. Si anguli ABm et OCn ſint infinite parui neglectis negligendis, erit $AO = AB$, $Am = 2Bo$; $BQ = BC = AB$ et $Bn = 2Ca$, ſi praeterea radius circuli per tria puncta A, B, C transeuntis ponatur $= R$ et radius circuli per tria alia puncta B, C, D transeuntis $= S$, erit $2BO = \frac{AB^2}{R}$ et $Ca = \frac{BC^2}{S} = \frac{AB^2}{S}$, vnde ſubſtitutis hiſce valoribus mutabitur aequatio praecedentis lemmatis in hanc $\frac{R.A}{AB} + \frac{AM.R.C}{AB^2} = \frac{S.B}{AB} + \frac{DX.S.D}{AB^2}$.

4. *Problema.* Inuenire curuaturam fili, cuius ſingula puncta datis duabus quibuscunque potentiis, altera ad curuam normali, altera ad datam lineam vbique parallela trahuntur.

Solutio. Sint tria elementa curuae quaeſitae tres lineolae aequales AB, BC et CD; retentisque ſignificationibus iisdem ſumantur abſciſſae x in axe perpendiculari ad directionem potentiarum paralellarum: applicatae y ſint ad axem perpendiculares, radius oſculi in puncto B ſit $= R$; elementum curvae

vae AB $= ds$; ita erit AM $= dx$, DX $= dx + 2ddx$, B $= A + dA$, D $= C + dC$, S $= R + dR$: facta itaque applicatione lemmatis ſecundi ad praeſentem caſum, habebitur $\frac{R.A}{ds} + \frac{dx.\ R.\ C}{ds^2} = \frac{(R+dR) \times (A+dA)}{ds} + \frac{(dx+2ddx) \times (R+dR) \times (C+dC)}{ds^2}$: qua aequatione recte pertractata fit $-AdRds - RdAds = RdCdx + 2CRddx + CdxdR$; vel $-ARds - CRdx = \int CRddx$, vel (ponendo $dyds$ loco $Rddx$) $-ARds - CRdx = ds\int Cdy$. Q. E. I.

5. *Corollarium* 1. Si $C = o$, id eſt, ſi ſolae potentiae ad curuam normaliter inſiſtentes adſint, fit AR = quantitati conſtanti, id quod indicat eſſe in huiusmodi curuis ſemper et vbique radium oſculi reciproce proportionalem potentiae: eſtque haec proprietas pro elaſtica, velaria, lintearia aliisque infinitis.

6. *Coroll.* 2. Si vero $A = o$, id eſt, ſi ſolae potentiae inter ſe parallelae filum trahant, inſeruiet haec aequatio $- CRdx = ds\int Cdy$: ad quam reducendam ſumo differentialia $-CRddx - CdxdR - RdxdC = Cdyds = CRdx$ ſeu $-CdxdR - RdxdC = 2CRddx$; et diuidendo per $CRdx$, oritur $-\frac{dR}{R} - \frac{C}{C} = \frac{2ddx}{dx}$, et integrando $-\log. CR = 2\log. dx - \log. gds^2$, ſumtisque numeris $\frac{1}{CR} = \frac{dx^2}{gds^2}$, aut $CRdx^2 = gds^2$, ex qua aequatione cognoſcitur, eſſe vbique potentiam in ratione reciproca compoſita ex radio oſculi et quadrato ſinus anguli, quem potentia facit cum axe : inſeruitque aequatio pro determinanda curuatura catenarum vtcunque inaequaliter craſſarum. Atque hiſce duobus corollariis continentur omnes curuae,

quae hactenus Geometris conſideratae fuerunt circa hoc argumentum; lubet nunc alias quasdam ſuperaddere nouas, quas natura affectat.

7. *Problema.* Inuenire curuaturam lintei grauis aqua repleti.

Solut. Aſſumitur linteum vniformis eſſe craſſitiei idemque explicatum habere figuram rectanguli, cuius latera oppoſita ſint duobus baculis firmis alligata; itaque fiet vt ſingula fila ad eandem curuam ſe componant, cuius natura iam eſt indaganda: apparet autem ſingula fili puncta trahi a duabus potentiis, quarum altera a preſſione fluidi linteo ſuperincumbentis oriunda perpendicularis eſt ad curuam ipſique altitudini fluidi proportionalis ſumtis ds conſtantibus, altera vero, quae grauitati lintei debetur, vbique eſt verticalis et conſtans. Si itaque axis curuae ſumatur in ſuperficie fluidi, dicanturque abſciſſae in axe ſumtae x, applicatae verticales y, ſubſtituendum erit in vltima aequatione §. 4. $myds$ pro A et $nnds$ pro C, et ſic habebitur $-myRds^2 - nnRdxds = dsſnndsdy = nnyds^2 + a^3ds^2$ (per a^3ds^2 intelligo quantitatem conſtantem ad arbitrium ſumendam): ponatur loco R valor ipſius $\frac{dyds}{ddx}$, et erit recte diſpoſitis terminis $-mydyds = nnyddx + nndydx + a^3ddx$, quae integrata cum additione conſtantis b^3ds dat $b^3ds - \frac{1}{2}myyds = nnydx + a^3dx$, qua reducta aequatione oritur denique $dx = (b^3 - \frac{1}{2}myy)dy : \sqrt{(nny + a^3)^2 - (b^3 - \frac{1}{2}myy)^2}$. Q. E. I.

8. *Coroll.* 1. Si grauitas lintei euaneſcat prae pondere fluidi ſuperincumbentis oritur curuatura lin-

lintei Patruo meo Iacobo Bernoulli primo conſiderata, nam hoc in caſu eſt $n = o$ ſitque $dx = (b^3 - \frac{1}{2}myy) dy : \sqrt{a^6 - (b^3 - \frac{1}{2}myy)^2}$.

9. *Coroll.* 2. Si vero grauitas fluidi ſuperincumbentis ponatur nulla, ita vt linteum ſolo ſuo pondere incuruetur, oritur funicularia ſeu catenaria a Patre meo primo Geometris propoſita, tunc nempe eſt $m = o$, habeturque talis aequatio: $dx = b^3 dy : \sqrt{(nny + a^3)^2 - b^6}$.

10. *Problema.* Inuenire curuaturam laminae elaſticae partim proprio pondere, partim pondere appenſo incuruatae.

Solutio. Aſſumam laminam per totam ſuam longitudinem aequabilis eſſe ſtructurae, vtvt problema non difficilius fiat, ſi lamina ſit inaequalis ſtructurae. Sit vero longitudo totius laminae l, pondus ipſius p, pondus appenſum P, ponaturque laminam NsQ (fig. 2.) parieti verticali NM inſertam ad angulum quemcunque, eiusque extremitati Q appenſum eſſe pondus P. Conſideremus iam elementum curuae bs, ducamusque horizontalem sq: Sit centrum grauitatis arcus sQ in o: ducatur verticalis or, eique parallela Qq; ſicque patet pondus arcus sQ agere in vectem sr, pondusque appenſum P agere in vectem sq: faciunt autem haec duo pondera, vt elementum curuae (quod alias in directum iaceret cum elemento proxime cb, ſitumque haberet in ba) inflectatur in bs. porro conſtat lineolam sa (perpendicularem ad curuam) proportionalem eſſe vi elementum bs inflectenti; vnde ſupereſt Fig. 2.

vt vis inflectens quaeratur. Sit vero arcus $Qs = s$, abſciſſa QT horizontalis $= x$, $sr = q$; ſic erit pondus arcus $Qs = \frac{sp}{l}$, quod ductum in vectem sr dat potentiam abſolutam $= \frac{sqp}{l}$, cui ſi addatur xP, habebitur vis totalis elementum bs inflectens $\frac{sqp}{l} + xP$, quod eſt proportionale ipſi as ſeu reciproce proportionale radio oſculi sA, quem vocabo R; vnde habetur talis aequatio:

$$\frac{sqp}{l} + xp = \frac{m}{R}.$$

At vero cum in hac aequatione reperiatur q, haec quantitas eliminanda eſt; ad hoc requiritur, vt aequatio habeatur inter q, s et x, quae ſequenti modo obtinetur. Diuidatur bifariam elementum sb in puncto g, ducaturque ro; tunc ſi fiat talis analogia: $s . ds :: og . oe = \frac{ds . og}{s}$ erit e centrum grauitatis arcus $s + ds$, ſi ducatur dein eb parallela ipſi bm, erit $eb = qds : s = nr$ et eſt fluxus puncti r ſeu $dq = bm - sr = dx - nr =$ (quia $nr = \frac{qds}{s}$:) $dx - \frac{qds}{s}$ vel $sdq + qds = sdx$ aut $qs = \int sdx$; quem valorem ſubſtituendo in aequatione ad curuam, oritur $\frac{p}{l}\int sdx + Px = \frac{m}{R}$. Q.E.I.

11. *Coroll.* Si $p = o$, oritur elaſtica ordinaria; et ſi $P = o$ prodit elaſtica noua, ad quam ſe componit lamina proprio ſe pondere incuruans: cuius adeoque proprietas talis eſt vt $\int sdx$ ſit reciproce proportionalis radio oſculi: vlteriorem reductionem nondum ſatis tentaui, dubito tamen an vlterius reduci poſſit aequatio.

12. *Problema.* Inuenire curuaturam funis tam elaſticitate quam grauitate praediti.

Sa-

Solutio. Problema hoc, quod ante plures annos Geometris propoſitum, ſed a nemine quod ſciam publice ſolutum fuit, facile nunc ad modum praecedentis problematis ſoluitur. Id ſolummodo inſuper conſiderandum eſt, punctum Q non pondere verticaliter deorſum ſed potentia alia ſub quacunque directione QR trahi. Ponemus rurſus potentiam QR exprimi per P reliquas denominationes retinendo easdem quas modo poſuimus; reſoluenda autem eſt potentia QR in QB et QC. Sint vero BQ, QC, QR, vt, m, n, g; erit ergo potentia QB $= \frac{mP}{g}$, potentia QC $= \frac{n}{g}P$; agit autem pot. QB in vectem Qq ſeu $Ts = y$; vnde ipſius momentum $= \frac{mPy}{g}$ et potentia QC agit in vectem $sq = TQ = x$, ergo ipſius momentum $= \frac{nPx}{g}$ et momentum ponderis arcus sQ eſt iterum $\frac{sqp}{l} - \frac{p\int sdx}{l}$; ergo $as = \frac{m}{R} = \frac{mPy + nPx}{g} + \frac{p\int sdx}{l}$, quae eſt aequatio ad funem elaſticum et grauem parieti verticali ſub angulo quocunque infixi in N, et duabus potentiis quibuscunque ſiue affirmatiuis, ſiue negatiuis tracti. Q. E. I.

13. *Scholium.* Facillimum nunc eſt generaliſſime rem expedire: Exprimat nempe α pondus arcus Qs, β vim elateris in puncto s, ceteraeque denominationes retineantur vt ante; habebitur talis aequatio $\int \alpha dx + \frac{mPy + nPx}{g} = \frac{\beta}{R}$; ſub qua continetur quicquid circa praeſens curuarum genus excogitari poteſt, quod probe notauit Clariſſimus noſter Eulerus, qui problemata haec a me ſibi propoſita ita ſoluit, vt nihil ſuperaddi poſſe videatur.

SOLVTIO PROBLEMATIS

DE

Inuenienda curua, quam format lamina vtcunque elaſtica in ſingulis punctis a potentiis quibuscunque ſollicitata.

Auctore

Leonhardo Eulero.

M. Febr. 1728 Tab. IV.

CVrua, quam Cel. Iacobus Bernoulli primus et poſtea plures alii laminae elaſticae incuruatae aſſignarunt, quaeque nomine curuae elaſticae nota eſt, nonniſi laminae elaſticae grauitatis experti competere ex ſolutionibus eorum intelligitur. Curuatura autem laminae elaſticae grauis, tametſi haec ſola in rerum natura locum obtinere queat, tamen a nemine adhuc, quantum ſcio, determinata eſt. Incidimus nuper Clar. D. Bernoulli, et ego in hanc quaeſtionem, eamque non inelegantem exiſtimantes aggreſſi, atque ſolutiones eodem tempore et egregie inter ſe congruentes conſequuti ſumus. Cum vero ſolutio prima fronte non nihil difficilis inuentu viſa ſit ſolutionem meam hic quoque exponere non abs re fore arbitratus ſum. Quaeſtio quidem primum tantum ad hoc extendebatur, vt inueniatur curua, quam

quam lamina elaſtica grauis vno termino firmata, altero potentiam quamuis applicatam habens format. Nunc vero hanc rem generalius complectar laminam in ſingulis punctis vtcunque elaſticam, et praeter pondus appenſum qualescunque applicatas habentem poſiturus; Idque eapropter, tum, quod, etſi quis vnum vel alterum caſum particularem elicuerit, problema tamen hoc modo perceptum exinde non adeo facile ſoluatur; tum propter ſummam eius vniuerſalitatem: etenim non ſolum ad curuaturas laminarum quomodocunque elaſticarum extenditur. Verum etiam ad curuas corporum perſecte flexibilium et a potentiis quomodocunque ſollicitatorum accommodari poteſt; ita ut ex eo omnium corporum flexibilium curuaturae inueniri poſſint. Accedit praeterea, quod ſolutioproblematis hoc ſenſu accepti vix prolixior euadat, quam in quouis caſu ſpeciali. Ante vero quam ipſum problema aggredi poſſum, neceſſe eſt nonnulla praemittere ſolutioni inſeruientia.

Hypotheſis.

Si duae virgae *a*B, BC in B e latere iunctae a potentia AD in ſitum ABC torqueantur, vt ang. AB*a* comprehendat. Erit momentum potentiae AD in B vt vis elaſtica in B et angulus AB*a* coniunctim. Hoc ſcilicet factum aequipollet facto ex potentia AD in AB. Aſſumitur vulgo haec hypotheſis; eius tamen veritas ſi angulus AB*a* eſt vehementer paruus ſatis probabiliter poteſt phyſice demonſtrari. Fig. 1.

Lem-

Fig. 2. *Lemma* 1. Si curuae ANM in puncto quocunque N applicata ſit potentia NO, eaque reſoluatur in horizontalem NS et verticalem NR. Erit vis pot. NO ad curuam AM circa M rotandam ſeu eius momentum aequale NR.FP+NS.GQ. Ductis MQ, AP horizontalibus et AQ, PM verticalibus.

Demonſtratio. Potentia NO aequiualet duabus NR et NS ſimul agentibus. Momentum vero potentiae NR in M eſt, vt ex principiis ſtaticis conſtat, NR. PF; et momentum potentiae NS in M. eſt NS. GQ. Ergo cum ambae potentiae curuam AM verſus eandem plagam conuertere conentur, erit momentum ambarum ſeu momentum potentiae NO=NR.FP+NS.GQ. Q.E.D.

Fig. 3. *Lemma* 2. Si curuae AM in ſingulis punctis N potentiae parallelae perpendiculares nimirum in AP, applicatae, fuerint determinatae a curua BG, ita vt in punctum N agat potentia, quae eſt vt QN. Conſtruaturque alia curua AVT, cuius applicatae QV ſint vt areae AQHB. Erit ſumma momentorum omnium potentiarum ad curuam ANB circa M flectendam vt area APT.

Demonſtratio. Momentum potentiae QH in M eſt QH.QP. Puncto M aſſumatur proximum *m*. ductaque applicata *mp*; erit momentum potentiae QH in *m* aequale QH.Q*p*. Ergo differentia horum momentorum eſt QH.P*p*. Idem cum de ſingulis potentiis valeat, erit differentia omnium momentorum in M et in *m* agentium aequalis areae ABGP in P*p* ſeu PT.P*p*. i. e. elemento P*pt*T. Si iam ponatur ſumma omnium mo-

momentorum in $m = M + dM$, quarum differentia eſt dM; erit igitur $dM = PptT$, conſequenter M erit = areae APT. Q. E. D.

Dicantur iam abſciſſae in AP aſſumtae, x, et reſpondentes applicatae in curua AT, P. Deſignat autem P ſummam omnium potentiarum in x contentarum; ergo ſumma omnium momentorum in M $= \int P dx$.

Problema Generale.

Sit lamina BMA vtcunque elaſtica et in ſingulis punctis a potentiis quibusuis ſollicitata, fixa autem ea ſit in B, atque in A duo pondera appenſa habens E et F, quorum E ſecundum verticalem AE, et alterum F ſecundum horizontalem AC trahit. Oportet determinare curuam AMB iuxta quam lamina hoc modo ſollicitata flectitur. Fig. 4.

Solutio. Sumatur horizontalis AC pro axe, in quo capiantur abſciſſae $AP = x$. Sit ei orthogonalis $PM = y$ et $AM = s$, cuius elementa conſtantia accipiantur. Ponatur radius curuedinis in $M = r$; erit angulus, quem duo elementa in M conſtituunt, reciproce vt r. Deſignetur vis elaſtica in M litera v; erit vis hunc angulum producens vt $\frac{v}{r}$. (hyp.) Huic ergo proportionalis eſſe debet ſumma omnium momentorum in M agentium tam ortorum a ſingulis potentiis curuae AP applicatis, quam a ponderibus E et F. Eſt autem momentum potentiae ſeu ponderis E in $M = E.AP = Ex$ (Lemma 1.) et ponderis F momentum eſt $= F.PM = Fy$ (cit.) Praeter haec ſollicitatur punctum M etiam a potentiis ſingulorum

punctorum arcus AM. Iis in verticales ſecundum AE et horizontales ſecundum AC agentes reſolutis, vocetur ſumma omnium verticalium P, et horizontalium ab A in M vsque, Q. Erit ſumma momentorum potentiarum verticalium $=\int P dx$ (Lem. 2.) et ſumma momentorum potentiarum horizontalium $=\int Q dy$. Erit itaque tota vis in M agens $=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$. Cui cum proportionalis eſſe debeat $\frac{v}{r}$, habebitur haec aequatio $\frac{Av}{r}=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$. Si loco P+E ſcribatur tantum P, et Q loco Q+F; habebitur $\frac{Av}{r}=\int Pdx+\int Qdy$, ſit $\frac{Av}{r}=Z$; erit $Z=\int Pdx+\int Qdy$ ſeu $dZ=Pdx+Qdy$ Ex qua natura curuae AMB cognoſcitur. Q. E. I.

Vt vſus huius aequationis melius percipiatur, ad caſus particulares eam accommodabo, eosque partim iam tractatos, vt congruentia eorum perſpici queat, partim vero ad nondum agitatos, vt plurimas a natura formatas curuas adhuc ignotas in lucem producam.

Problema. Inuenire aequationem generalem pro curuis, quas corpora perfecte flexibilia a potentiis quomodocunque ſollicitata formant.

Solutio. Obtinebimus corpora perfecte flexibilia, quando vis elaſtica vbique euaneſcit, tum enim vel minima vis duo elementa ad quemuis angulum inclinare valebit; Exprimitur autem quantitas vis elaſticae litera v ponatur igitur $v=o$ et reſultat aequatio $o=Ex+Fy+\int Pdx+\int Qdy$, quae ergo ſatisfaciet quaeſito. Q. E. I.

Vt autem P et Q, quippe quae a ſummatione pen-

pendent, eliminentur, et loco eorum dP et dQ introducantur, quae denotant potentias ipſas in punctis M applicatas, differentietur aequatio et habebitur $Edx + Fdy + Pdx + Qdy = o$. Ergo $Q + \frac{Pdx}{dy} + F + \frac{Edx}{dy} = o$. Vnde $dQ + \frac{Pdyddx - Pdxddy}{dy^2} + \frac{dPdx}{dy} + \frac{Edyddx - Edxddy}{dy^2} = o$. Sed cum ponatur ds conſtans erit $dyddy = -dxddx$. et $dyddx - dxddy = \frac{ds^2 ddx}{dy}$. Quare $dQ + \frac{Pds^2 ddx}{dy^3} + \frac{Eds^2 ddx}{dy^3} + \frac{dPdx}{dy} = o$. Et ex hac $\frac{dQdy^3}{ds^2 ddx}$ $P + E + \frac{dPdy^2 dx}{ds^2 ddx} = o$. Vnde porro $\frac{dy^3 ddQ}{ds^2 ddx}$ $+$ $\frac{3dQdy^2 ddxddy - dQdy^3 d^3x}{ds^2 ddx^2} + dP + \frac{dy^2 dxddP}{ds^2 ddx}$ $+$ $\frac{2dPdydxddyddx + dPdy^2 ddx^2 - dPdy^2 dxd^3x}{ds^2 ddx^2} = o$. Ex hac prodibit haec $dy^3 ddQddx - 3dQdydxddx^2 - dQdy^3 d^3x + dy^2 dxddPddx - 3dPdx^2 ddx^2 + dPds^2 ddx^2 - dPdy^2 dxd^3x = o$. Haec aequatio fiet multum ſimplicior, ſi introducatur radius oſculi r, qui eſt $= \frac{dsdy}{ddx} = \frac{-dsdx}{ddy}$ tunc enim prodibit $o = rdxddP + 2dPdsdy + dPdrdx + rdyddQ - 2dQdsdx + dQdrdy$. Quae aequatio omnes poſſibiles curuas, quas corpora perfecte flexibilia quomodocunque ſollicitata formare poſſunt ſub ſe comprehendit.

Probl. Inuenire curuam, quam format filum perfecte flexile, cui in ſingulis punctis potentiae verticales ſunt applicatae.

Solut. Euaneſcunt igitur hoc in caſu potentiae

K 2 ho-

horizontales, vnde $Q=o$. Quare $o=Ex+Fy+\int Pdx$; et hinc $Edx+Fdy+Pdx=o$: porroque $dP+\frac{Fdxddy-Fdyddx}{dx^2}=o$; ſeu $dPdx^2dy=Fds^2ddx$. Eſt vero $\frac{dsdy}{ddx}=r$, vnde $rdPdx^2=Fds^3$. Et ex hiſce aequationibus curua in exemplis ſpecialibus cognoſcetur. Q. E. I. Dat haec aequatio omnis generis catenarias.

Sit $dP=ads$ ſeu potentiae ſint vbique aequales, prodire debet catenaria communis pro catenis aequaliter craſſis. Habebitur autem $adx^2dy=Fdsddx$; quae integrata dat $ay=C-\frac{Fds}{dx}$ ſeu neglecta conſtante C, quae naturam curuae non immutat, et loco F poſito $-F$ obtinetur $aydx=Fds$, et hinc $dx=\frac{Fdy}{\sqrt{(aayy-FF)}}$ quae eſt aequatio pro catenaria, hoc mo-
Fig 5. do applicanda: ob F negatiue aſſumtum, pondus ea littera indicatum trahere debet in plagam contrariam ei, verſus quam F trahere initio ponebamus. Ex A demittatur verticalis $Aa=F:a$, et horizontalis aP erit axis curuae AMB, quae erit conuexa verſus aP et tangentem in A habebit parallelam axi aP, erit igitur AB catenaria vulgaris.

Sit $dP=adx$. erit $adx^3dy=Fds^2ddx$ ergo $ay=-\frac{Fds^2}{2dx^2}$. ſeu ſumto F negatiuo erit $2aydx^2-Fdx^2=Fdy^2$. Vnde $dx=\frac{dy\sqrt{F}}{\sqrt{(2ay-F)}}$ quae eſt aequatio pro parabola appolloniana, vt conſtat.

Problema. Inuenire curuam, quam format filum flexile, cui in ſingulis punctis potentiae normales ſunt applicatae.

Solu-

Solutio. Sit curua AMB, et vt ſupra $AP = x$, Fig. 6.
$PM = y$, et $AM = s$. Sit potentia in M normalis $MR = dN$ reſoluatur ea in verticalem et horizontalem, erit verticalis $dP = \frac{dNdx}{ds}$ et horizontalis $dQ = \frac{dNdy}{ds}$ vnde $P = \int \frac{dNdx}{ds}$ et $Q = \int \frac{dNdy}{ds}$; atque $ddP = \frac{dNddx + dxddN}{ds}$. et $ddQ = \frac{dNddy + dyddN}{ds}$; quibus valoribus ſubſtitutis in aequatione generali pro corporibus perfecte flexibilibus; ſed loco ddP, $\frac{dNdy}{r} + \frac{dxddN}{ds}$ et loco ddQ, $-\frac{dNdx}{r} + \frac{dyddN}{ds}$, vt radius oſculi iu computum ducatur; inuenietur $dNdr + rddN = o$ vnde $rdN = Cds$. Eſt igitur potentia normalis reciproce vt radius oſculi. Q. E. I.

Conuenit haec proprietas cum iam inuentis, quare non immorabor deriuandis ex ea curuis lintcariis, velariis, et quae ex hac proprietate conſequuntur.

Haec duo poſtrema problemata iam dudum a Geometris ſolutiones nacta ſunt. Quando ſcilicet potentiarum directiones vel inter ſe parallelae vel in curuam formatam normales ſunt. Quomodo autem curuae corporum flexibilium, quibus potentiae qualescunque ſunt applicatae, inueniri debeant, nemo adhuc monſtrauit, praeter Celeberrimum Iac. Hermannum, cuius in Phoronomia extat huius problematis ſolutio.

Problema. Inuenire curuam, quam format filum AMB perfecte flexile, cui in ſingulis punctis M applicatae ſunt duae potentiae verticales et normales. Fig. 7.

Solutio. Reſoluatur normalis MR, in laterales MN et MK, quarum MK ſit verticalis et MN horizontalis. Erit $dP = ML + MK$ et $dQ = MN$. Dicatur $ML = dL$ et $MR = dN$. Erit $MK = \frac{dNdx}{ds}$ et $MN = \frac{dNdy}{ds}$; vnde $dP = dL + \frac{dNdx}{ds}$ et $dQ = \frac{dNdx}{ds}$. Et vlterius $ddP = ddL + \frac{dNddx + dxddN}{ds} = ddL + \frac{dNdy}{r} + \frac{dxddN}{ds}$. Atque $ddQ = \frac{dNddy + dyddN}{ds} = \frac{-dNdx}{r} + \frac{dyddN}{ds}$. Quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur $dNdsdr + rdsddN + rdxddL + dLdxdr + 2dLdsdy = 0$. ſeu $rdsdN + rdxdL + \int dLdsdy = 0$. Vnde natura curuae patebit. Q. E. I.

Ponatur potentia verticalis dL, proportionalis elemento curuae ds. Vt habeatur filum vbique aequaliter craſſum et graue. Sit igitur $dL = ads$ habebitur $rdsdN + ardsdx + ayds^2 C = ds^2$, quae diuiſa per ds, dat $rdN + ardx + ayds = Cds$.

Fig. 8. Sit AMB lintearia grauis vsque in BI liquore repleta, erit vis normalis dN vt MI, ſit $PI = b$; erit $MI = b - y$. Ponatur igitur $dN = bds - yds$; erit $brds - yrds + ardx + ayds = Cds$. Eſt autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$; vnde $bsdy - ydsdy + adxdy + ayddx = Cddx$, quae integrata dat $byds - \frac{1}{2}yyds + aydx = eds + Cdx$ ſeu $(yy - by + e)ds = aydx - Cdx$. Mutatis conſtantibus, vt numeri euitentur: haec aequatio tranſibit in ſequentem $dx = \frac{(yy - by + e)dy}{\sqrt{(ay - c)^2 - (yy - by + e)^2}}$ vt haec aequatio pro axe AP valeat, oportet vt euaneſcente y fiat $dy:dx = 0:1$. eritque $cc = ee$. et $c = \pm e$. Si a fiat $= 0$, habebitur aequatio pro nota lintei curua.

Fig. 9. Quaeratur curuatura velariae grauis vniformis AMB

AMB. Irruat ventus ſecundum TM parallelam axi AP. Erit eius vis, qua in curuam normaliter agit vt quadratum ſinus anguli AMT id eſt vt $\frac{dy^2}{ds^2}$ ponatur itaque $dN = \frac{dy^2}{ds}$, habebitur $\frac{rdy^2}{ds} + ardx + ayds = Cds$. Cum autem ſit $r = \frac{dsdy}{ddx}$ erit $dy^3 + adsdydx + aydsddx = Cdsddx$. Eſt autem $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$ ergo $dy^2dx + adsdx^2 - aydsddy + Cdsddy = 0$ ponatur $ds = pdy$; erit $ddy = \frac{dpdy}{p}$ et $dx = dy\sqrt{pp-1}$. Vnde erit $dy\sqrt{pp-1} + ap(p$ [illegible] $dy = cdp - aydp$, ſeu $\frac{dy}{c-ay} = \frac{dp}{\sqrt{(pp-1)} + ap(pp-1)}$. Sit $\sqrt{pp-1} = p-q$; erit $\frac{dy}{c-ay} = \frac{-4qdq}{4qq+a-aq^4}$ reſoluatur $4qq+a-aq^4$ in duos factores $1+\beta qq$ et $a+\delta qq$; vbi eſt $\beta = \frac{2}{a} + \sqrt{(\frac{4}{aa}+1)}$ et $\delta = 2 - \sqrt{(4+aa)}$. Et hinc erit $\frac{dy}{c-ay} = \frac{mqdq}{1+\beta qq} + \frac{nqdq}{a+\delta qq}$, vbi $m = \frac{-4-2\sqrt{(4+aa)}}{a\sqrt{4+aa}}$ et $n = \frac{4-2\sqrt{(4+aa)}}{\sqrt{(4+aa)}}$. Erit igitur $-\frac{1}{a}l(c-ay) = \frac{m}{2\beta}\,l(1+\beta qq) + \frac{n}{2\delta}\,l(a+\delta qq) = \frac{-l(1+\beta qq) + l(a+\delta qq)}{\sqrt{4+aa}} = \frac{1}{\sqrt{(4+aa)}}\,l\frac{a2+aqq(2-\sqrt{(4+aa)})}{a+qq(2+\sqrt{(4+aa)})}$, eſt autem $q = p - \sqrt{pp-1} = \frac{ds-dx}{dy}$ vnde habebitur $\left(\frac{c-ay}{D}\right)^{\sqrt{(4+aa)}:a}$

$$\frac{ady^2 + (ds-dx)^2(2+\sqrt{4+aa})}{ady^2 + (ds-dx)^2(2-\sqrt{4+aa})}$$ pro velaria graui.

Si ventus incidat deorſum iuxta TM, erit eius vis in velum vt quadratum ſinus anguli AMT: id eſt vt $\frac{dx^2}{ds^2}$. Ponatur igitur $DN = \frac{dx^2}{ds}$ habebitur $\frac{rdx^2}{ds} + ardx + ayds = Cds$. Quia autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$, erit dx^2dy Fig. 10.

+

$+adsdxdy+aydsddx=Cdsddx$, vnde $\frac{dy}{Cds-ayds}=\frac{ddx}{dx^2+adsdx}=\frac{1}{ads}\cdot\frac{ddx}{dx}-\frac{1}{ads}\cdot\frac{ddx}{dx+ads}$ quae integrata abit in hanc $=\frac{1}{ads}l(cds-ayds)=\frac{1}{ads}l\frac{dx+ads}{dx}+\frac{1}{cds}lbds$. Ergo $\frac{c-ay}{b}=\frac{dx+ads}{dx}$ ſeu $cdx-aydx=bdx+abds$. Sit $c-b=e$; erit $dx^2(e-ay)^2=aabbds^2$ conſequenter $dx=\frac{abdy}{\surd(e-ay)^2-aabb)}$. vt AP ſit axis, oportet ſit $dy:dx=o:1$. ſi $y=o$ erit ergo $e=\pm ab$. Ideoque $dx=\frac{bdy}{\surd(yy\pm 2by)}$. Quae eſt aequatio pro catenaria eademque manet quomodocunque a varietur, vt ergo non a pondere fili pendeat. Hoc autem ita accidere oportere ex eo patet, quod tam vis venti, quam grauitatis ſeorſim eandem catenariam producant.

Sit vis normalis quoque conſtans, nempe $dN=bds$ erit $brds+ardx+ayds=cds$. quia vero $r=\frac{dsdy}{ddx}$ erit $bdsdy+adxdy+ayddx=cddx$, quae integra dat $\frac{eds}{c-ay}=bds+adx$. Sit $e=bc+ac$; erit $cds=cdx-byds-aydx$. atque $dx=\frac{(c+by)dy}{\surd(c-ay)^2-(c+by)^2}$.

Fig. 11. *Problema.* Si curuae AMB in quouis puncto M duae potentiae applicatae fuerint, quarum altera normalis in curuam vt MN, altera tangentialis MT: inuenire aequationem pro curua, quam format filum perfecte flexile.

Solutio. Reſoluantur ambae potentiae in laterales, quarum vna verticalis altera horizontalis, nempe MN in MR et RN, et MT in MS et TS; Erit $dP=MR+MS$ et $dQ=NR-TS$. Sit autem $MN=dN$. et $MT=dT$. Erit $MR=\frac{dNdx}{ds}$, $NR=\frac{dNdy}{ds}$, $MS=\frac{dTdy}{ds}$ et $TS=\frac{dTdx}{ds}$. Ergo $dP=\frac{dNdx+dTdy}{ds}$ et

$dQ=$

$dQ = \frac{dNdy - dTdx}{ds}$; vnde $ddP = \frac{dNddx + dxddN + dTddy + dyddT}{ds}$ $= \frac{dNdy}{r} - \frac{dTdx}{r} + \frac{dxddN}{ds} + \frac{dyddT}{ds}$. Et $ddQ = \frac{-dNdx}{r} - \frac{dRdy}{r}$ $+ \frac{dyddN}{ds} - \frac{dxddT}{ds}$. Quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur ſequens aequatio $dNdr + rddNd + Tds = o$ ſeu poſt integrationem $rdN + Tds = Cds$; vnde ob $r = \frac{dsdy}{ddx}$ erit $dNdy + Tddx = Cddx$. Q. E. I.

Haec aequatio hunc habet vſum, vt, cum admodum ſimplex ſit, facile ad omnes caſus applicari poſſit, ſed nihilominus generalis eſt, etenim omnis potentia in normalem et tangentialem reſolui poteſt. Praeterea iſtud adhuc monendum eſſe puto, aequationem generaliſſimam quoque hoc modo ſuccinctiorem reddi, loco verticalium et horizontalium normales et tangentiales in computum ducendo, haec autem oritur $dNdrds + rdsddN + dTds^2 = rd^3Z + drddZ + \frac{ds^2 dZ}{r}$ vbi $Z = \frac{Av}{r}$.

Problema. Inuenire aequationem generalem pro curuis, quas fila vtcunque elaſtica in ſingulis punctis nullas potentias applicatas habentia, formare debent. Fig. 12.

Solutio. Erit ergo hoc in caſu et $dP = o$, et $dQ = o$. Ergo $rd^3z + drddz + \frac{ds^2 dz}{r} = o$, ex aequatione generali modo concinnata; erit enim in ea $dN = o$ et $dT = o$: vnde $rrddzd^3z + rdrddz^2 + ds^2 dzddz = o$, quae integrata dat $rrddz^2 + ds^2 dz^2 = ads^4$ ſeu $rddz = ds\sqrt{(ads^2 - dz^2)}$ Eſt autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$, vnde $\frac{ddz}{\sqrt{(ads^2 - dz^2)}}$ $= \frac{ddx}{dy} = \frac{ddx}{\sqrt{ds^2 - dx^2}}$. Hac ope logarithmorum integra-

ta obtinebitur $\frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{dz + \sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{ds\sqrt{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{dx + \sqrt{(dx - ds)^2}}{ds\sqrt{-b}}$ ſeu $\frac{dz + \sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{\sqrt{a}} = \frac{dx + \sqrt{(dx^2 - ds^2)}}{\sqrt{q}} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{\sqrt{b}}$ vnde $\frac{dz}{\sqrt{a}} - \frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{dy\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{\sqrt{a}}$. Ex qua oritur $\frac{dz^2}{a} - \frac{2dzdx}{\sqrt{ab}} + \frac{dx^2}{b} = \frac{-dy^2}{b} + \frac{dz^2}{a} - ds^2 - \frac{2\sqrt{(ads^2dy^2 - dy^2dz^2)}}{\sqrt{ab}}$ ſeu $\frac{\overline{b+1}.\,ds^2}{b} - \frac{2dzdx}{\sqrt{ab}} = \frac{-2\sqrt{(ads^2dy^2 - dy^2dz^2)}}{\sqrt{ab}}$: porro $\frac{(b+1)^2ds^4}{b} + \frac{4dx^2dz^2}{a} - \frac{4(b+1)ds^2dxdz}{\sqrt{ab}} = \frac{4ads^2dy^2}{a} - \frac{4dy^2dz^2}{a}$ ſeu $\frac{(b+1)^2ds^2}{b} + \frac{4dz^2}{a} - 4dy^2 = \frac{4(b+1)dxdz}{\sqrt{ab}}$. Et $\frac{2dz}{\sqrt{a}} = \frac{(b+1)dx}{\sqrt{b}} \pm \sqrt{(\frac{(b+1)^2dx^2}{b} - \frac{(b+1)^2ds^2}{b} + 4dy^2)} = \frac{\overline{b+1}.xd}{\sqrt{b}} \pm dy \sqrt{(4 - \frac{(b+1)^2}{b})}$ Ergo $\frac{2z}{\sqrt{a}} = \frac{\overline{b+1}.x}{\sqrt{b}} \pm y\sqrt{(4 - \frac{(b+1)^2}{b})}$ ſeu $z = Ex + Fy = \frac{Av}{r}$.

Eadem aequatio inuenitur ex primo inuenta aequatione, vbi $\int Pdx$ et $\int Qdy$ euaneſcunt adeoque reſtat $Ex + Fy = \frac{Av}{r}$ Q. E. I.

Fig. 13. *Problema.* Inuenire curuaturam elateris grauitatis expertis, et vbiuis eiusdem vis elaſticae.

Solutio. Cum vis elaſtica vbique ſit eadem ponatur $v = a$; eritque $Ex + Fy = \frac{Aa}{r}$. Poni poteſt loco $Ex + Fy = Gt$, vbi t denotet abſciſſam alio loco aſſumtam, eritque $Gt = \frac{Aa}{r}$, quae aequatio praebet curuam elaſticam iam cognitam, hoc vero modo integrabitur. Erit $Exdsdy + Fydsdy = Aaddx$ ſeu $xdy + \frac{Fydy}{E} = \frac{Aaddx}{Eds}$. Etiam autem eſt $Exdsdx + Fydsdx = -Aaddy$ ſeu $ydx + \frac{Exdx}{F} = -\frac{Aaddy}{Fds}$. Conſequenter adden-

dendo et integrando habebitur $yx + \frac{Exx}{2F} + \frac{Fyy}{2E} = \frac{Aadx}{Ed} - \frac{Aady}{Fds} + C$. Ergo $2FEdxds + EExxds + FFyyds = 2AFadx - 2AEady + 2EFCds = ds(Ex+Fy)^2$. Quae dabit etiam elaſticam. Q.E. I.

Problema. Inuenire curuam quam format filum, AMB aequabiliter graue, et aequabiliter vbique elaſticum. Fig. 12.

Solutio. Cum filum ſit vbique aequaliter graue, erit dP conſtans, nempe $= ads$: vnde $P = a$ et $Q = o$. Praeterea quia elaſticitas vbiuis eadem, ponatur $v = b$; erit $\frac{Ab}{r} = Ex + Fy + \int asdx$. Augeatur as conſtanti E et aequatio non immutabitur, eritque $\frac{Ab}{r} = Fy + \int asdx$ ſeu $\frac{-Abdr}{rr} = Fdy + asdx$: atque abiiciendis ſuperfluis conſtantibus $asdx + cdy + \frac{bdr}{rr} = o$. Eſt autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$; ergo $\frac{1}{r} = \frac{ddx}{dsdy}$: ex quo $\frac{dr}{rr} = \frac{ddxddy - dyd^3x}{dsdy^2} = \frac{-dxddx^2 - dy^2 d^3x}{dsdy^3}$. Ergo $asdsdxdy^3 + cdsdy^4 = bdxddx^2 + bdy^2 d^3x$. Ponatur $dx = pds$, erit $dy = ds\sqrt{(1-pp)}$ et $ddx = dpds$ et $d^3x = dsddp$. Quibus ſubſtitutis habebitur $aps(1-pp)^{3:2} ds^2 + c(1-pp)^2 ds^2 = bpdp^2 + bddp(1-pp)$. Hanc vero aequationem nullo pacto eo reducere potui, vt conſtrui poſſit.

Caeterum elegans eſt hoc problema, quod veram curuam tam filorum perfecte flexibilium quam laminarum elaſticarum exhibeat: etenim nullus extat funis, qui perfecte ſit flexilis, neque vlla lamina elaſtica, quae non ſit grauis, niſi forte in fluido aequalis grauitatis ſpecificae flectatur. Idem hoc problema in Act. Eruditorum Lipſ. A. 1724. propoſi-

poſitum eſt, vt curuatura funis elaſtici ſeu non perfecte flexilis inueniatur, nec vero quantum ſcio ſolutionem hucusque vllus dedit, praeter Clar. Dan. Bernoulli, qui eodem propemodum tempore, quo ego, ſolutionem nactus eſt.

Fig. 14. *Problema.* Inuenire curuam, quam format lamina elaſtica BMA in B fixa proprioque pondere incuruata.

Solutio. Fluit ex praecedente, vbi duntaxat F et E pondera applicata euaneſcere debent, quare haec habebitur aequatio $\frac{Ab}{r} = \int asdx$ ſeu neglectio ſuperfluis conſtantibus $\frac{A}{r} = \int sdx$ quae vt ſupra ad ſequentem reducitur $sp^2(1-pp)^{\frac{3}{2}}ds^2 = Apdp^2 + A(1-pp) ddp$. At neque haec ad conſtruendum accommoda effici poteſt.

Fig. 15. *Problema.* Inuenire curuam fili AB in A fixi in B liberi, agitati a vento NM.

Solutio. Sit vis grauitatis in M$=ads$, et vis venti $= \frac{-bdy^2}{ds}$. Inuenietur haec aequatio $brdy^2 = ardsdx + ayds^2$. Eſt r radius oſculi $= \frac{dsdy}{ddx}$. Quare $bdsdy^3 = ads^2dxdy + ayds^2ddx$. ſeu $bdy^3 = adsdxdy + aydsddx$. Ponatur $dx = pdy$ erit $ddx = pddy + dpdy =$ (ob $dxddx = -dyddy$) $= \frac{-pdxddx}{dy} + dpdy$, ex qua inuenitur $ddx = \frac{dpdy}{1+pp}$. His factis ſubſtitutionibus orietur aequatio $bdy\sqrt{(1+pp)} = apdy(1+pp) + aydp$ et $\frac{dy}{y} = \frac{adp}{b\sqrt{(1+pp)} - ap(1+pp)}$. In qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae, et propterea curua quaeſita conſtrui poteſt.

DA-

DANIELIS BERNOVLLI, IO. Fil.
OBSERVATIONES DE SERIEBVS
QVAE FORMANTVR EX ADDITIONE VEL SVBTRACTIONE QVACVNQVE TERMINORVM SE MVTVO CONSEQVENTIVM,

Vbi praeſertim earundem inſignis vſus pro inueniendis radicum omnium Aequationum Algebraicarum oſtenditur.

I.

ANni ſunt fere quinque, quod Venetiis agens tumultuarias quasdam circa ſeries obſeruationes cum Nobili Veneto communicaueram, quas paulo poſt idem Nobilis, meo tamen nomine, imprimi curauit vna cum aliis theorematibus geometricis ſub titulo *Exercitationum Geometricarum*. Mentionem ibi feceram ſerierum quarum quilibet terminus duorum praecedentium ſummae aequatur, neſcius illas primo a Keplero poſtea a Domino Caſſini fuiſſe adhibitas, et denique a Cel. Geometris Dominis Montmort, Moivre, Goldbach, Nicolao Bernoulli Patrueli meo aliisque omni ſucceſſu exploratas et quidem ſub facie multo generaliori: imo praeſtitiſſe doctiſſimos viros, quod fieri poſſe tunc nondum putabam, nimirum terminum generalem inueniſſe pro omnibus iſtius modi ſeriebus, quarum exemplum allatum a

M. Sept. 1728.

me fuerat contra ſententiam eruditiſſimi Dni Goldbach, *ſeries omnes, modo certam progreſſionis legem ſeruent ad formulam aliquam ſeu terminum generalem reduci poſſe*, aſſerentis. Horum me primo certiorem fecit D. Nicolaus Bernoulli, in litteris d. 21. Nov. 1724. Venetias ad me datis, dein ipſe Dominus Goldbach, addens vterque formulas ſuas pro termino generali ſerierum, de quibus ſermo eſt. His intellectis, mox ipſemet totum rei myſterium penetraueram, et ita quidem vt nihil inſuper hac in re deſiderari poſſe videretur: neque profecto amplius de ſeriebus iſtis cogitaſſem, niſi de nouo examini meo illas commendaſſet praememoratus Patruelis meus in litteris nouiſſimis 22. Aug. 1728. ad me ſcriptis, ſubiungens *poſſe earum ope ſolui problema ſectionum angularium ſine infinite paruis aut ſeriebus indefinitis, ita ſe inueniſſe quod exiſtente ſinu toto* $=1$ *ſinu arcus* $A=z$, *ſinus arcus multipli* nA *ſit* $=[(\sqrt{1-zz}+z\sqrt{-1})^n-(\sqrt{1-zz}-z\sqrt{-1})^n]:2\sqrt{-1}$. Ruminando itaque argumentum, incidi in noua theoremata eaque non minus vtilia quam elegantia. Singula ordine percurram et quantum potero breuiter.

2. Lex generaliſſima ſerierum noſtrarum poſtulat, vt denotantibus A, B, C, D, ... E, terminos quoscunque ordine retrogrado ſe mutuo in ſerie conſequentes, ſit ſemper vltimus $A=mB+nC+pD.\ \ldots +qE$, vbi coëfficientes m, n, p, ... q, poſſunt ſignificare numeros quoscunque integros aut fractos, eosque tam affirmatiuos quam negatiuos. Poſſunt hae ſeries habere perio-

riodos ſiue ratione ſignorum ſiue ratione numerorum, in quas vsque recurrunt, veluti ſequens in qua quilibet terminus aequalis eſt differentiae duorum praecedentium o. 1. 1. o. −1. −1. o. 1. 1. o. −1. −1. o. etc. hinc procul dubio eſt, quod generaliter *recurrentes* nominari coeperint. Quoties autem adſunt huiusmodi periodi terminus generalis non aliter quam per quantitates imaginarias exprimi poteſt.

3. Proprietas haud inelegans eſt ſerierum recurrentium, quod comprehendunt omnes algebraicas ſimul atque geometricas. De progreſſionibus geometricis res ſatis obuia eſt, et magis illuſtrabitur in ſequentibus: de algebraicis nunc dicemus (voco autem ſeries algebraicas, quarum terminus generalis hac formula catholica comprehenditur $a + bx + cxx + dx^3 +$ &c. illasque dico pertinere ad ordinem n, quando maxima dimenſio ipſius x in termino generali eſt $= n$ et per x intelligo exponentem termini.) Theorema circa hanc rem ſe mihi obtulit, quod non credideram, vlli antea fuiſſe obſeruatum, quod vero poſtmodum iam a Moiureo in tractatu ſuo *de menſura ſortis* detectum fuiſſe intellexi: Ecce illud.

4. *Theorema generale pro omnibus ſeriebus algebraicis.*

In omni ſerie algebraica ordinis cuiuscunque $n - 1$. ſi excerpantur ordine retrogrado termini contigui, numero $n + 1$, deſignati litteris A, B, C, D, E, &c. dico fore ſemper $A = nB - \frac{n(n-1)}{2}C + \frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}D - \frac{n.(n-1).(n-2((n-3)}{2.3.4}E +$ &c.

Coroll.

Coroll. 1. Omnes ſeries ſecundi ordinis habent terminum quemcunque aequalem triplo praecedentis ſeu vltimi minus triplo penultimi plus antepenvltimo.

Exempli loco ſint numeri trigonales 1. 3. 6. 10. 15. 21. &c. erit 21. = 3. 15. − 3. 10 + 6 aut 15 = 3. 10. − 3. 6 + 3.

Coroll. 2. In omnibus ſeriebus tertii ordinis eſt terminus quiuis = quadruplo vltimi minus ſextuplo penultimi plus quadruplo antepenultimi minus penantepenultimo.

Exempli gratia ſint cubi numerorum naturalium 1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. &c. erit 343 = 4. 125 − 6. 64 + 4. 27 − 8.

5. Apparet ex praecedente theoremate, quanam lege ſeries recurrentes conſtrui debeant, ita vt fiant algebraicae. Si vero alia, quam quae modo definita fuit, lex fingatur, ſemper ſeries orientur *tranſcendentes*, ſeu potius *exponentiales*, quarum terminus generalis vt inueniatur, ſequens propoſitio inſeruiet.

Lemma. Quaecunque ſint coefficientes $m, n, p, \ldots . q$, poterit ſemper exhiberi ſeries numerorum continue proportionalium talis, vt denotantibus iterum litteris A, B, C, D, ... E terminos contiguos ordine retrogrado e ſerie excerptos, quorum numerus indicatur per N, ſit $A = mB + nC + pD \ldots . + qE$.

Demonſtratio. Si enim terminus generalis in progreſſione geometrica quaeſita ſit α^x, hicque ponatur

natur $=A$, erit $B=\alpha^{x-1}$, $C=\alpha^{x-2}$, $D=\alpha^{x-3}$ ... $E=\alpha^{x-N+1}$, hinc aequatione facta ad legem propoſitionis eademque diuiſa per α^{x-N+1}, habebitur $\alpha^{N-1}=m.\alpha^{N-2}+n.\alpha^{N-3}+p.\alpha^{N-4}\ldots\ldots+q$, ope cuius aequationis quam *primariam* voco eruetur valor ipſius α, et cum aequatio habeat N–1 radices totidem progreſſiones geometricae deſiderato ſatisfacientes inuenientur, quarum quaelibet per numerum conſtantem multiplicari poteſt.

6. Sint iam radices praecedentis aequationis P, Q, R. . . . . S, haud difficulter apparet, omnes ſeries poſſibiles conditioni praecedentis lemmatis ſatisfacientes comprehendi ſub hoc termino generali $\beta. P^x+\gamma. P^x+\delta. R^x\ldots+\varepsilon S^x$, et cum eaedem ſeries tot habeant ab initio terminos arbitrarios, quot ſunt vnitates in N–1. id eſt, quot ſunt radices P, Q, R, ... S, inſeruient coefficientes β, γ, δ.. ε ad terminos arbitrarios definiendos, hinc igitur patet modus vniuerſalis inueniendi terminum generalem omnium ſerierum noſtrarum §. 2. definitarum.

7. E re potius erit regulam expoſitam exemplo quodam illuſtrari, quam vlterioribus verbis explicare. Sit inueniendus terminus generalis huius ſeriei.

1. 1. 2. 3. 5. 3. 13. 21. 34. 55. &c.

in qua quilibet terminus duorum praecedentium ſumma eſt, quaeque incipit a duobus terminis arbitrariis 1. 1. Erit aequatio *primaria* §. 5. $\alpha\alpha=\alpha+1$. cuius radices ſunt $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, indicandae

litteris P et Q. vnde terminus generalis pro omnibus ſeriebus, quarum termini vbique duorum praecedentium ſummae aequales ſunt, fit $\beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x + \gamma(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x$, qui inſeruiet pro exemplo particulari modo allato, ſi poſito ſucceſſiue $x=0, x=1$, quantitates reſultantes ponantur aequales nihilo et vnitati (qui ſunt termini quorum exponentes ſunt 0 et 1); ergo $\beta+\gamma=0$, et $\beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+\gamma(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1$; ſeu $\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\gamma=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, ita vt tandem terminus generalis allatae ſeriei ſit $[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x] : \sqrt{5}$.

8. Hinc manifeſtum eſt, haud futurum fuiſſe vt terminus generalis exhiberi poſſet, niſi tot eſſent aequationis *primariae* radices, quot termini concurrunt ad formandum ſequentem. Quid ergo ſi in eadem aequatione duae pluresue radices eaedem ſint? huic autem incommodo remedium afferetur, ſi radix in termino generali multiplicata intelligatur per $b+cx+dxx \dots + ex^{m-1}$, vbi m indicat, quoties radix comprehenditur in aequatione hocque de ſingulis radicibus obſeruandum eſt. Sit v. gr. terminus generalis indagandus huius ſeriei

0. 0. 0. 0. 1. 0. 15.-10. 165.-228. &c.

incipientis a quinque terminis arbitrariis, et cuius lex requirit, vt ſit vbique A=0 B+15 C-10 D-60 E+72 F. hic aequatio *primaria* lemmatis dat $\alpha^5 - 15\alpha^3+10\alpha\alpha+60\alpha-72=0$, cuius quinque radices ſunt $\alpha=2$, $\alpha=2$, $\alpha=2$, $\alpha=-3$ et $\alpha=-3$. Dico itaque terminum generalem propoſitae ſeriei fore $(b+cx+dxx) . 2^x + (e+fx) . (-3)^x$ et poſſe ex comparationibus quinquies inſtitutis termini generalis cum

ter-

terminis ſeriei correſpondentibus haberi valores litterarum b, c, d, e, et f, ſicque denique fore terminum generalem

$$\frac{(1026-1035x+225xx).2^x+(224-80x).(-3)^x}{90000}$$

9. Intelligitur ex praecedente §. origo theorematis noſtri §. 4. expoſiti; ſi enim radices ſingulae aequationis *primariae* ſint aequales vnitati, id eſt, ſi aequatio *primaria* ſit $\alpha^n = n\alpha^{n-1} - \frac{n.\overline{n-1}}{2}\alpha^{n-2} + \frac{n\,\overline{n-1}}{2.}\frac{\overline{n-2}}{3}\alpha^{n-3} -$ etc. habebit terminus generalis hanc formam $b+cx+dxx \ldots\ldots +ex^n$, qui omnes algebraicas continet ſeries.

10. Verbum addam de methodo ſummandi omnes ſeries, quarum hactenus mentio facta fuit. Equidem ſi in termino generali ſingula membra ſpecialiter ſpectentur, nullum erit, quod non ſub hac formula comprehendatur $bx^m\,a^x$. dico autem, ſummam ſeriei, cuius terminus generalis eſt $bx^m a^x$, eſſe $=(cx^m+dx^{m-1}+ex^{m-2}\ldots\ldots+f)\,a^x-f$: valores litterarum c, d, $e\ldots\ldots f$. obtinentur ex comparationibus diuerſis ſummae generalis cum ſummis particularibus: regulas generales pro hoc negotio ſi quis cupiat, ſibi ipſi facile formabit. Sit verbi gr. terminus generalis ſeriei ſummandae xa^x, erit ſumma ſeriei $\left(\frac{ax}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2}\right).a^x + \frac{a}{(a-1)^2}$, vbi notari poteſt formulas haſce exponentiales fieri ſemper algebraicas quoties $a=1$. nempe $\frac{xx+x}{2}$ pro caſu allato, modo calculus recte inſtituatur. Caeterum ſi ſeriei ſummandae terminus generalis ex pluribus membris conſtet, cum ſingulis erit faciendum quod de vno mon-

ſtrauimus; praefero autem hanc ſummandi methodum aliis ob vniuerſalitatem eius.

11. Hactenus dicta pleraque iam ante hos quatuor annos mihi innotuerunt, et antea quoque plurimas proprietates detexeram, quibus ſeries noſtrae plane abundant, quasque hic exponerem, niſi in generalibus ſubſiſtere conſtituiſſem. Sed vnum non praetergrediar, quod nunc demum mihi fuit obſervatum, poſſe ope ſerierum noſtrarum radices omnium aequationum algebraicarum, cuiuscunque ſint dimenſionis, expedita, tuta et facili appropinquatione haberi ſine vlla praeuia tentatione quas reliquae methodi poſtulare ſolent. Eſt mihi methodus duplex, altera pro minima, altera pro maxima aequationis radice inuenienda, attentione non facta ad ſigna radicibus praefixa, ita vt ſic radix tam quae maxime quam quae minime a nihilo diſtat, determinari poſſit.

12. *Methodus noua inueniendi radices omnes cuiuscunque aequationis affectae tam numericae quam algebraicae.*

Concilietur aequationi propoſitae haec forma

$$1 = ax + bxx + cx^3 + ex^4 + \text{ \&c.}$$

Dein formetur ſeries incipiendo a tot terminis arbitrariis, quot dimenſiones aequatio habet, ea lege, vt ſi A, B, C, D, E &c. denotent terminos ſe inuicem directo ordine conſequentes, ſit vbique $E = aD + bC + cB + eA +$ &c. ſintque in hac ſerie ſatis continuata duo termini proximi M et N, erit terminus antecedens M diuiſus per conſequentem N proxime aequalis radici quaeſitae.

13. Exemplum capiemus ab hac aequatione

$$1 = -2x + 5xx - 4x^3 + x^4.$$

fiat ſeries incipiendo a quatuor numeris arbitrariis (quia ſcilicet aequatio propoſita totidem habet dimenſiones) 1. 1. 1. 1. talis vt ſemper terminus nouus formetur ex duplo vltimi negatiue ſumti plus quintuplo penultimi, minus quadruplo antepenultimi plus penantepenultimo. Series haec eſt.

1. 1. 1. 1. 0. 2. −7. 25. −93. 341. −1254. hinc erit radix quaeſita proxime $= -\frac{341}{1254}$.

14. Sit porro $1 = x + 2xx + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$ Conſtruatur ſequens ſeries incipiendo nunc a quinque terminis arbitrariis

1. 1. 1. 1. 1. 15. 29. 71. 183. 477. 1239. 3171. &c. erit $\frac{1239}{3171}$ aut $\frac{59}{151}$ proxime radix minima aequationis propoſitae. Et ſic de omnibus reliquis.

15. Duo ſunt caſus qui difficultatem aliquam pariunt; primus, quando radix minima aequationis poteſt tam affirmatiue quam negatiue accipi; ſecundus, quando radix minima eſt imaginaria, veluti ſi aequatio has haberet radices $\sqrt{-4}$, $-\sqrt{4}$ et 5, quarum vltima realis maior i. e. magis a nihilo diſtans cenſenda eſt quam quaeuis duarum reliquarum. Dicam quid hic agendum ſit. In primo caſu reſpiciendi tantum ſunt termini alterni; qui ſi ad conſtantem rationem vergunt, dum termini contigui magis vagantur, aequalitatem arguunt inter affirmatiuam radicem et negatiuam; atque hoc in caſu terminus ex ſerie diuidendus eſt per illum qui ſecundo loco ſequitur et erit radix quadrata quotientis radix quaeſita aequationis: veluti ſi habeatur

 $1 = -$

$$1 = -y + 4yy + 4y^3.$$

formeturque ſeries per regulam §. 12. expoſitam

1.1.0.8.−4.36.−20.148.−84.596.−340.2388.&c.

erit decimus terminus 596 diuiſus per duodecimum 2388, id eſt, $\frac{149}{597}$ proxime = quadrato radicis quaeſita $+V\frac{149}{597}$. patet ex hoc exemplo ſeries noſtras ſat cito ad optatum ſcopum perducere, ſiquidem inuentus numerus $\frac{596}{2388}$ a vero tantum deficit hac minima quantitate $\frac{1}{2388}$; vera enim radix eſt $+\frac{1}{2}$. Poteſt eidem incommodo medela afferri ponendo $x = y + a$ et quaerendo ex methodo ordinaria valorem ipſius y.

16. In altero caſu diſpiciendum eſt, num radix futura ſit affirmatiua, num negatiua; ſin prius, ponendum eſt in aequatione propoſita $x = y + a$, ſin poſterius $x = y - a$, et dein ſemper per regulam noſtram valor ipſius y inueniri poterit, modo a maior aſſumta fuerit, quam eſt valor quaeſitus ipſius x: nunquam fallemur ergo aſſumendo numerum maximum pro a; verum hic obſeruandum eſt, ſeriem eo citius et facilius conducere ad radicem quaeſitam, quo minor fuerit quantitas $a - x$; neque adeo ſine omni circumſpectione in hoc caſu res tentanda eſt; totam rem duplici exemplo illuſtrabo. Sit

$$1 = \frac{-x + xx - x^3}{2}$$

Hic ſi velim ſine vllo examine ſeriem formare, qualis v. gr. eſt.

1. 1. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $-\frac{1}{8}$. $-\frac{3}{16}$. $-\frac{9}{32}$. $-\frac{11}{64}$. $-\frac{17}{128}$. $-\frac{3}{256}$. $\frac{7}{512}$.

haec vel in infinitum continuata nullam dat radicem ſim-

ſimplicem, vtpote cuius termini minime vergunt ad rationem conſtantem, at ſi ponam $x=y-2$ (video enim radicem eſſe negatiuam neque poſſe magnam eſſe) habebitur talis aequatio.

$$1=\frac{15y-7yy+y^3}{8}$$

vel ſi fractiones euitare velimus, poteſt poni $y=8z$, id eſt, $x=8z-2$; et ſic erit

$$1=15z-56zz+64z^3.$$

ad cuius poſterioris aequationis normam talis conſtruatur ſeries

1. 1. 1. 23. 353. 4071. 42769. 436151.

hinc ergo erit $z=\frac{42769}{436151}$ et $x=-\frac{530150}{436151}$.

Accipiatur porro haec aequatio loco alterius exempli

$$1=-\frac{x-xx+x^3}{2}$$

Ex qua fieri poteſt talis ſeries.

$$1.\ 1.\ 1.\ -\tfrac{1}{2}.\ \tfrac{1}{4}.\ \tfrac{5}{8}.\ -\tfrac{11}{16}.\ \tfrac{5}{32}.\ \tfrac{37}{64}.\ \tfrac{-91}{128}.\ \&c.$$

Quae iterum nullam aequationis radicem indicare poteſt; verum ſi ponatur $x=y+3$ (apparet enim valorem ipſius x iam affirmatiuam eſſe) oritur haec altera aequatio $1=\frac{-20y-8yy-y^3}{13}$, vel potius poſito $y=13z$, id eſt, $x=13z+3$.

$$1=-20z-104zz-169z^3$$

quae poſterior aequatio dat ſequentem ſeriem.

0. 0. 1. -20. 296. -4009. 52776. -688608.

vnde $z=-\frac{52776}{688608}$ et $x=\frac{1379736}{688608}=2{,}0036$ proxime, reuera autem eſt $x=2$.

17. Circa incommodum §. 15. indicatum, *poſſe nimirum duas radices eſſe aequales*, id praeterea no-

notandum eſt, poſſe ſimilem regulam adhiberi pro caſu, quo plures quam duae radices ſunt inter ſe aequales, modo omnes ſint reales. Supereſt vt dicam quid faciendum ſit, cum radicum aequalium aliae ſint imaginariae aliae reales: veluti cum fuerit $x^4-1=0$: eſt $x=1$, $x=-1$, $x=\sqrt{-1}$ et $x=-\sqrt{-1}$, quae omnes radices per definitionem noſtram cenſendae ſunt aequales ſeu a nihilo aequidiſtantes. Huic rurſus incommodo ſubveniemus ponendo $x=y+a$, quod adeoque remedium vniuerſale eſt: hanc vero ſubſtitutionem ſi non faciamus, et contineat aequatio propoſita hanc alteram aequationem $x^m-a=0$, obſeruabimus in ſerie, conuergere terminos illos ad rationem conſtantem $\frac{a}{1}$ quos inter termini numero $m-1$ exiſtunt.

18. Inſeruit annotatio praecedentis §. ad extractiones radicum ex potentiis. Sit verbi gratia extrahenda radix cubica ex binario: erit aequatio

$$x^3=2 \quad , \text{ vel}$$

$$1= * \; * \; \tfrac{1}{2}x^3$$

atque ſeries ad normam aequationis conſtructa $1.\ 1.\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{8}$, quae ipſa nihil aliud indicat quam eſſe $x^3=2$. verum poſito $x=y+1$, ita vt aequatio propoſita mutetur in hanc

$$1=3y+3yy+y^3$$

iam tuto ſeries formari poterit, qualis eſt ſequens

$$1.\ 1.\ 1.\ 7.\ 25.\ 97.\ 373.\ 1435.\ 5521.$$

ergo $y=\frac{1435}{5521}$ et $x=\frac{6956}{5521}=1,2597$, qualis proxime eſt, adeo vt nullo negotio ſic inueniatur, quod alias multum temporis et laboris requirit.

Si velim radicem biquadratam extrahere ex 20, facio $x^4=20$, et poſito $x=y+2$, erit

$1=$

$1 = 8y + 6yy + 2y^3 + \frac{1}{4}y^4$. ergo obtinet haec ſeries $0.0.0.1.8.70.610.5316\frac{1}{4}.46332$ &c. vnde $y = \frac{21265}{185328}$ et $x = 2\frac{21265}{185328}$; quae radix certe longe exactiſſima eſt, ita vt dubitem, poſſe vlla alia methodo illam tam breui compendio eademque accuratione obtineri. Sit porro radix quadrata extrahenda ex 26; erit $xx = 26$; ponatur $x = y + 5$; erit recte diſpoſita aequatione $1 = 10y + yy$: hinc habetur ſeries 0. 1. 10. 101. 1020. 10301. 104030. ergo $y = \frac{10301}{104030}$ et x ſeu $\sqrt{26} = 5\frac{10301}{104030} =$ 5,0990195136o, et per regulam ordinariam inuenitur 5. 09901951359, qui duo numeri ſola vnitate differunt.

19. Supereſſent quaedam adhuc, circa iam dicta monenda, plurima vero noua dicenda; malo autem haec lectoris attentioni relinquere; id ſolum ſuperaddam, poſſe methodo noſtra etiam radices compoſitas inueniri; veluti cum aequatio propoſita hanc habet radicem compoſitam $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots\ldots + c = 0$, poſſum proxime ope ſerierum determinare litteras $a, b \ldots\ldots c$ modo non ſint imaginariae, quod ſaepe vſui venire poteſt, nec tamen ab vllo edoctum. Patet etiam regulam noſtram non ſubſiſtere modo in exemplis numericis, ſed ſe extendere omnino ad aequationes algebraicas, veluti ſi fuerit aequatio cubica generalis $1 = ax + bxx + cx^3$ formeturque ſeries $0.0.0.1.a.aa+b.a^3+2ab+c.a^4+3aab+2ac+bb.a^5+4a^3b+3aac+3abb+2bc.$ &c. erit proxime $x = \frac{a^4+3aab+2ac+bb}{a^5+4a^3b+3aac+3abb+2bc}$, poſ-

ſuntque ſimiles formulae omnes purae algebraicae et rationales pro cunctis aequationibus algebraicis exhiberi. Denique me vel non monente liquet, poſſe ſucceſſiue omnes radices reales inueniri, quia aequatio per inuentam primam radicem diuidi, poſteaque ſecunda radix inueniri poteſt; debet autem reſiduum diuiſionis, quod ſemper minimum erit, negligi, aut quod ſatius eſt, inuenta vna radice, ponatur $x = y + a$: hac enim poſitione recte inſtituta quaevis radix in minimam aut maximam pro lubitu mutari poteſt; de his forſan alio tempore: nunc paucis indicabo methodum alteram, de qua §. 11. dixi, illam inſeruire omnium aequationum radici maximae inueniendae.

20. Propoſita rurſus ſit aequatio catholica, ſed in ſequentem modum diſpoſita.

$$x^m = ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots\ldots + d.$$

formeturque ſeries incipiendo a tot terminis arbitrariis quot dimenſionum aequatio eſt talis, vt ſi A, B, C, D, E etc. denotent terminos directo ordine e ſerie excerptos et contiguos, ſit vbique $E = aD + bC + cB + dA$ etc. ſintque in hac ſerie ſatis continuata duo termini proximi M et N, erit terminus conſequens N diuiſus per antecedentem M proxime aequalis radici quaeſitae.

21. Exempli loco eandem ſumemus aequationem quae §. 13. eſt et cuius radix minima erat $-\frac{341}{1257}$, ſed ita diſpoſitam

$$x^4 = 4x^3 - 5xx + 2x - 1.$$

Quod ſi iam fiat talis ſeries:

1. 1.

1. 1. 1. 1. 0. −4. −15. −41. −97. −209.
erit $\frac{209}{97}$ proxime aequalis radici maximae aequationis propoſitae. Circa hanc alteram methodum mutatis mutandis vſu venient omnia ea, quae §§. 15. 16. 17. et 18. memorata ſunt, nimirum poſſe omnibus incommodis obuiam iri huiusmodi poſitionibus $x=y+a$. Vtraque ſaepiſſime methodus ſine vlla praeparatione locum habet, aliquando vnica, et aliquando neutra: quod poſterius tamen raro contingit; ſed ambae ſemper poſt poſitionem debite factam $x=y+a$, modo radices reales adſint ſuccedunt; aliquando etiam vna, interdum altera compendioſius adhibetur.

22. Supereſt vt oſtendam, quomodo fractionum incommodo remedium afferri poſſit in vtraque methodo: propoſita fuerit aequatio generalis intelligendo per a, b, c, d etc. numeros integros ad quam aequationem omnes reduci poſſunt, nempe haec

$$a=bx+cxx+dx^3+$$

Obuiam ibitur fractionibus ponendo $x=ay$. Verum ſi in ſecunda methodo occurrat aequatio
$ax^m=bx^{m-1}+cx^{m-2}\ldots\ldots+d$ ponendum erit $x=\frac{y}{a}$. ſaepe tamen non male omittitur haec ſubſtitutio.

23, Finiam praeſentem diſſertationem demonſtratione theorematis Dni Bernoulli, ne qua in re deſim humaniſſimae inuitationi Celeberrimi Viri, cuius amicitiam et conſanguinitatem ſemper colam.

Lemma. Si AB, AC, et AD ſint arcus circulares arithmetice proportionales dicaturque radius Tab. IV. Fig. 16.

 $=1$

$=1$, coſinus differentiae communis BC vel CD$=c$, erit ſinus ED arcus maximi$=$ſinui GC ducto in $2c-$HB. Demonſtrationem per ſe ſatis obuiam non addo.

24. *Theorema.* Exiſtente ſinu toto $=1$, ſinu arcus AB $=z$, erit ſinus arcus nAB $=[(\sqrt{1-zz}+z\sqrt{-1})^n-(\sqrt{1-zz}-z\sqrt{-1})^n]:2\sqrt{-1}$.

Demonſtratio. Quoniam ſinus arcus AB$=$BC$=$CD etc.$=z$, eiusque coſinus $=c$; erit GC (per praeced. lemma)$=2cz$, ED$=4cz-z$, et ſic porro. Formetur adeoque ſeries incipiendo a duobus terminis z et $2cz$ talis, vt quilibet terminus ſit aequalis praecedenti multiplicato per $2c$ minus termino qui hunc praecedebat, et manifeſtum eſt fore, vt terminus cuius exponens eſt n exprimat ſinum arcus nA. eſt autem ſeries talis

$$z.2cz.4ccz-z.8c^3z-4ccz.16c^4z-8c^3z-4ccz+z.\&c.$$

cuius terminus generalis eſt $[(c+z\sqrt{-1})^n-(c-z\sqrt{-1})^n]:2\sqrt{-1}=$ (ponendo $\sqrt{1-zz}$, loco c) $[(\sqrt{1-zz}+z\sqrt{-1})^n-(\sqrt{1-zz}-z\sqrt{-1})^n]:2\sqrt{-1}$. Q. E. D.

Scholium. Si duo primi arcus AB et BC ſint inaequales poterit ope lemmatis noſtri ex datis ſinubus horum arcuum inueniri ſinus arcus AB$+n$BC vel ſinus arcus AB$-n$BC; neque ad hoc requiritur, vt innoteſcat prius ſinus arcus nBC methodoque ordinaria quaeratur ſinus arc. AB$+n$BC vel AB$-n$BC; ita enim ad expreſſionem valde compoſitam perueniremus.

CON-

CONSIDERATIO CVRVARVM QVARVNDAM ALTIORIS GENERIS, QVAE FACILE DESCRIBI POSSVNT.

Autore
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

IUdicauit olim Ill. Tſchirnhuſius, ad omne id quod in tota Matheſi abſconditum eſt, detegendum, requiri tantum, vt omnes curuae poſſibiles conſiderentur: ſuntque in eadem ſententia etiam hodie omnes illi, qui in interiora Geometriae penetralia mentem immittunt. Notum praeterea, Celebrem Autorem citatum diſtinxiſſe curuas in claſſes varias, in quarum tertiam illas locat, ad quarum formationem non rectae, vti in ſectionibus conicis, ſed aliae curuae adhiberi debent. Venit igitur in mentem illa methodus, quam Illuſtr. Hoſpitalius in ſuis ſectionibus conicis adhibet, pro Parabola motu continuo deſcribenda, quae in eo conſiſtit, vt Fig. 1. exponatur linea recta AB, quam directricem vocat, huic applicetur alia perpendicularis CD mobilis iuxta directricem, ita vt parallelismum conſtanter ſeruet, haec praeterea in altero ſui extremo D filum annexum habeat, longitudinis DC, replicatum vero in E, ibique firmatum. Igitur in nodum apud F formatum inſertus ſtylus, ſi

M. Octob. 1728 Tab. V.

Fig. 1.

CD verſus A feratur, deſcribet Parabolam Apollonianam FG, vti fuſius id legitur loco citato. Secutus igitur ſum generaliter hanc methodum, videndo quales curuae prouenturae ſint, ſi loco directricis rectae ſumantur lineae curuae pro lubitu electae, quas ad imitationem etiam directrices vocabo, exinde autem modo praeſcripto genitas curuas, ſimpliciter appellabo genitas.

§. 2.

Fig. 2. Sit igitur Directrix Curua quaecunque AC Fig. 2 in huius axe aſſumatur recta arbitrariae longitudinis AK, cui in K affixum ſit filum eiusdem longitudinis AK, replicetur deinde huius fili longitudo quaelibet AE, ita vt alterum extremum A veniat in G. ibique firmetur clauo ad planum in quo curva deſcribi debet; ſinus vero quem filum in medio lineae AG formabit habeat inſertum ſtylum in E, moveatur deinde recta AK motu ſibi ſemper parallelo, ita vt extremitas A ſemper ſit in Directrice data AC et praeterea filum in omni ſitu rectae AK ſit aequaliter tenſum, deſcribetur ita curua noua FD, cuius natura eſt inquirenda Veniat recta AK in ſitum CD quemcunque, euidens eſt, partem fili ID adhaerere rectae ID, partem vero DG extendi a G vbi filum firmatum eſt ad D. Ducantur applicatae orthogoniae DF, CB, quae intra parallelas CI, AK contentae per hyp. aequales erunt. Hiſce ſuppoſitis ſtatuantur $AB = x$, $BC = FD = y$ $EF = t$ pars fili replicata $AE = EG = a$; erit ergo $FG = a - t$ $AF = a + t$, $BF = AF - AB = a + t - x$ atque per Pythagoricum DG $= \sqrt{}$

$=\surd(y^2+a^2-2at+t^2)$. Itaque ob DG=DC=BF, obtinebitur aequatio haec $\surd(y^2+a^2-2at+t^2)=a+t-x$, ex qua deducitur $y^2=4at-2ax-2tx+x^2$, vel $y^2=\overline{2a-x}.\overline{2t-x}$. Si iam ex natura curuae AC cognita detur x in ipſis y et conſtantibus, poterit hic valor ipſius x in aequatione modo inuenta ſubſtitui, atque obtinebitur alia ex meris y et t conſtans, quae exprimet naturam genitae ED. Quamuis autem aſſumatur longitudo fili maior quam eſt ipſa AK, apparebit ex calculo inde deducto, nihil in curva genita ED mutari, adeoque eius ſpeciem dependere tantum ex magnitudine portionis replicatae in filo quam hic vocauimus a.

§. 3.

Poſſunt autem omnes hae curuae per motum continuum facile deſcribi ſequenti mechanismo, nempe (1) aſſerculus NOYZ Fig. 3. modicae craſſitiei excauetur in curuam datam NAO, et ſuper planum in quo deſiderata curua deſcribi debet firmetur. (2) Paretur gnomon ADCE in parte ſuperiori A in acutum deſinens, vt illa parte curuae datae OAN ſemper poſſit applicari, firmetur deinde in C filum longitudinis CA, et replicetur in F ibique plano in quo curua eſſe debet, affigatur. (3) Aptetur parallelogrammum PQRS ex eadem materia aſſerculi NOYZ, quod intra duas regulas fixas LG, MK, leniter moueri poſſit, vt aſcendat vel deſcendat. (4) In medio ipſius AF, id eſt in T, inſeratur ſinui fili ſtylus, et moueatur gnomon ADE, ſic vt ſemper in A curuae datae applicetur, ac ſimul parte ſui altera DE leniter Fig. 3.

ter

ter deſcendat, filumque ſemper aequaliter tendat, mouebitur hac ratione linea AC motu ſibi ſemper parallelo, punctumque A in omni ſitu curuae datae OAN applicabitur, adeoque deſcribetur in hunc modum curua quaeſita.

§. 4.

Quodſi in Fig. 2. coniungantur puncta C et G, erit CDG triangulum aequicrurum, adeoque angulos C et G apparet eſſe aequales; quo longius vero abit recta CI ab axe curuae AK, eo maior fit angulus DCG, donec in ſitu LM rectae mobilis, apud applicatam GL ex puncto fili fixo G ductam, fit rectus, adeoque triangulum ibi deſinit, et duo latera aequalia ſua, habet inter ſe parallela; vnde manifeſtum eſt, in eo ſitu punctum curuae dari non poſſe, vbi fit AB = AG = $2a$. Vnde ſimul apparet, quo maior portio fili replicetur, hoc eſt quo maior ſit diſtantia punctorum AG, eo maiorem curuae partem deſcribi poſſe. Geometrice autem porro quaelibet puncta curuae genitae ſic determinantur; ſi ex puncto quocunque curuae datae C ducatur recta in punctum conſtans G, atque deinde fiat angulus DGC aequalis angulo GCD contento intra ductam CG et parallelam axi CI, ſecabit ducta ſub inuento angulo recta GD rectam axi parallelam in puncto D, quod erit in curua quaeſita. Ex quibus ſimul patet, problema ita quoque poſſe proponi. Fig. 4. ſit ſeries Fig. 4. triangulorum aequicrurorum, quae omnia terminentur in eodem puncto G, habeant vero latera CD, BE, AF parallela, et ſint praeterea puncta ABC

ABC in data aliqua curua, quaeritur in quanam curva futuri ſint omnes vertices horum triangulorum, FED, poterit enim facile problema hoc ad caſum §. 2. applicari, atque adeo quaeſitum inueniri.

§. 5.

Ex aequatione generali §. 2. inuenta $y^2 = 4at - 2ax - 2tx + x^2$, deducitur $t = \frac{2ax + y^2 - x^2}{4a - 2x}$, adeoque ſi curua genita data ſit, inuenietur ipſius directrix, ſi pro t ſubſtituatur valor hic modo inuentus. Eſt vero etiam $t = \frac{1}{2}x + \frac{y^2}{4a-2x}$ adeoque $ydt = \frac{1}{2}ydx + \frac{8ay^2dy - 4xy^2dy + \frac{4}{3}y^3dx}{(4a-2x)^2} + \frac{\frac{2}{3}y^3dx}{(4a-2x)^2}$ cuius integralis eſt $\int ydt = \frac{1}{2}\int ydx + \frac{\frac{2}{3}y^3}{4a-2x} + \int\frac{\frac{2}{3}y^3dx}{(4a-2x)^2}$, vnde patet, quod quadratura curuae genitae dependeat a quadratura curvae directricis, et praeterea a quadratura elementi $\frac{\frac{2}{3}y^3dx}{(4a-2x)^2}$. Cum praeterea in curua genita ſit ſubtangens $\frac{ydt}{dy}$, in directrice vero eadem $\frac{ydx}{dy}$, erunt ſubtangentes vtriusque curuae inter ſe in ratione elementorum abſciſſae in vtraque curua.

§. 6.

Aſſumam nunc directricem eſſe ſemicirculum, cuius radius ſit $= r$, erit ergo $y^2 = 2rx - x^2$, vnde deducitur $x = r \pm \sqrt{rr - yy}$. Ergo aequatio ad genitam habebitur haec $r \pm \sqrt{rr-yy} = a + t - \sqrt{(yy + aa - 2at + tt)}$ ponatur autem $r = a$, prodibit exinde aequatio $y^2 = 2at - t^2$ quae rurſus eſt ad circulum eiusdem ra-

dii vti prior in directrice aſſumtus ; generabitur itaque hoc modo alius arcus circularis , quod etiam in hunc modum facile demonſtratur : Sit ſemicirculus ABD , cuius centrum eſt C ; deſcribatur iam centro D radio DC arcus circularis CB , et ducatur diametro AD parallela EF, cum radiis EC, FD, et applicatis EG , FH ; quoniam applicatae EG, FH, intra parallelas EF , AD , continentur , per hyp. erunt aequales , conſequenter anguli ACE, CDF aequales et rectae quoque EC, FD parallelae erunt, igitur EF=CD=FD , conſequenter triangulum EFD aequicrurum euadet in omni ſitu rectae EF. Adeoque manifeſtum eſt , ſi directrix linea ſit ſemicirculus , et pars fili replicata aſſumatur radio aequalis, genitam curuam fore arcum circularem CB contentum intra ſemicirculum AE.B.

Fig. 5.

§. 7.

Vt vero inueniantur omnes curuae poſſibiles , quae genitas ſuas directrici habent ſimiles aut aequales , facile apparet , debere valorem ipſius t poni ad x in ratione conſtanti. Fiet ergo $\frac{2ax+yy-xx}{4a-2x} : x = m \cdot n$, vnde prodit aequatio generalis pro omnibus eiusmodi curuis $yy + \frac{2m-n}{n} xx - \frac{\overline{2m-n}\, 2a}{n} x = 0$, quae generaliter eſt ad ſectiones conicas, ita quidem vt ſi $2m-n=0$ adeoque xx euaneſcat, et ratio $m : n = 1:2$, inde prodeat parabola. Si vero $n < 2m$, vt xx habeat ſignum poſitiuum , proueniet ellipſis , quae ſub ſe continebit etiam circulum ; ſi vero $n > 2m$ orietur hyperbola ; adeoque haec methodus id ſingulare habet , vt quaelibet ſectionum conicarum pro directri-

ce

ce aſſumta genitam habeat in certis caſibus ſui ſimilem: de circulo res patet ex praecedenti paragrapho, de reliquis autem facile idem demonſtrabitur.

§. 8.

Pro parabola conſtruenda adhibuit Ill. Hoſpitalius modum qui directricem lineam rectam facit, deſeruit autem hanc analogiam in hyperbola, quam alia methodo vſitatiori deſcriptam ſuppoſuit, inſtituto ſuo ſine dubio commodiori. Generabitur vero etiam hyperbola ſi eadem recta pro directrice asſumatur, inclinata vero ad horizontalem qualis eſt Fig. 6.
recta AC. ſint enim AB $= a$ BC $= b$, ita vt angulus ad A qualiscunque eſſe poſſit, porro AD $= x$, DE $=$ GH $= y$, FG $= t$. Erit per §. 2. $x = a + t - \sqrt{yy + aa - 2at + tt}$, ergo ob AD ($x$) : DE ($y$) $=$ BC (b) : AB (a) elicitur aequatio pro curua FH ſequens $ty + \frac{\overline{aa - bb.y}^2}{2ab} + ay - \frac{2a^2 t}{b} = 0$ quae indicat curuam FH hoc modo genitam hyperbolam eſſe ad Aſymptotos relatam. Conſtruetur autem haec aequatio hunc in modum:

Sint duae coordinatae orthogoniae AP, PM, in A erigatur perpendicularis AB $= 2ab$. Fig. 7.
Cum BE $= aa - bb$ parallela ipſi AP coniungantur puncta AE, et producatur PA in D vt ſit DA $= \frac{a^3}{b^2}$ ex D ducatur recta DCK, in qua ſumatur DC $= \frac{a.\ AE}{bb}$, CK $=$ AE, denique ex K ſit KL $= \frac{a^4}{b^4}$ parallela ipſi AP, conſtruatur iam hyperbola inter aſymptotos CK,

CH, quae tranſeat per punctum L, et huic hyperbolae conſtruatur oppoſita MA, quae ſatisfaciet aequationi antea inuentae, vocatis AP t, et PM y. Quoniam vero AD $\times$ DC $= \frac{a^3}{b^2} \times \frac{a.AE}{b^2} = \frac{a^4.AE}{b^4} =$ KL $\times$ KC $=$ CS $\times$ SA, tranſibit hyperbola per punctum A, eritque idem A vertex hyperbolae, C vero centrum, CA ſemiaxis transuerſus, et CS^2 potentia eiusdem; ex his ergo patet, quod poſita $t = 0$ etiam y debeat eſſe $= 0$, ſed ſi in aequatione $ty + \frac{aa-bb}{2ab} y^2 + ay - \frac{2a^2 t}{b} = 0$ ponatur $t = 0$ prodibit $y = -\frac{2aabb}{aa-bb}$ id quod iam inuentis contrariari videtur. Sed cautione aliqua adhibita poterit produci omnino $y = 0$, nempe hac; ex poſita $t = 0$ prodit $\frac{aa-bb}{2ab} y^2 + ay = 0$, adeoque $y^2 + \frac{2a^2 b}{aa-bb} y = 0$, omittatur iam hic diuiſio per y et fiet $y^2 + \frac{2a^2 b}{aa-bb} + \frac{a^4 b^2}{\overline{aa-bb}^2} = \frac{a^4 b^2}{\overline{aa-bb}^2}$ hoc eſt extracta vtrinque radice $y + \frac{a^2 b}{aa-bb} = \frac{a^2 b}{aa-bb}$ vnde tandem legitime emergit $y = 0$.

§. 9.

Vti vero linea recta oblique poſita hyperbolam gignit; ita ſola hyperbola certis legibus poſita et pro directrice aſſumta lineam rectam gignit. Vt enim genita linea ſit recta, ponendum erit e x §. 5. t hoc eſt $\frac{2ax + y^2 - x^2}{4a - 2x} : y = a : b$, vnde prodit aequatio $y^2 + \frac{2a}{b} xy - x^2 - \frac{4a^2}{b} y + 2ax = 0$. quae eſt ad hyperbolam

bolam cum relatione ad diametrum cuius ſitum et reliquas circumſtantias praetereo, cum facile haec omnia ex vulgaribus formulis definiantur.

§. 10.

Methodo hucusque expoſitae analoga eſt haec ſequens quam idcirco adiungere placet. Sit gnomon GAC, circa centrum G mobilis, habeat is vti hactenus factum eſt, in H affixum filum longitudinis HA, replicatum in C, ita vt AB=BC, moveatur gnomon circa G, quaeritur qualem lineam ſtylus ſinui fili B inſertus, ſit deſcripturus? ſtatim apparet punctum gnomonis A deſcribere circulum, cuius centrum eſt G, radius vero GA, veniat ergo gnomon in ſitum GFD, erit rurſus DC=DF erigatur in D perpendicularis ad DE applicatam quae ſit DI et ponatur GA=a,AB=BC=b,BE=t,ED=u,erit ergo AE=$t+b$ CE=$b-t$, hinc CD=$(u^2+b^2-2bt+t^2)$=DF, ex natura circuli erit AI(u):IL=IL:IM ($2a-u$), vnde IL=$\sqrt{2aa-uu}$=IK. porro ob DF circulum in F tangentem orietur DL:DF=DF:DK,hinc DI=$\sqrt{(b^2-2bt+t^2+2au)}$=AE=$b+t$, vnde quadratis membris exſurgit $au=2bt$, quod oſtendit lineam genitam eſſe rectam in qua ducta GC ſit BE (t): ED(u)=AG(a):AC($2b$), adeoque triangula BDE et GCA eſſe ſimilia; ſi vero angulus GAH loco recti aſſumatur obtuſus aut acutus, quaelibet coni ſectio aſſumto angulo nunc maiori nunc minori exinde generabitur. Fig. 8.

DE LINEA BREVISSIMA
IN SVPERFICIE QVACVNQVE DVO QVAELIBET PVNCTA IVNGENTE.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Nov. 1728. Tab. VI.

CVIQVE notum eſt, et a multis tanquam axioma ponitur, lineam ſeu viam breviſſimam a dato puncto ad aliud quodcunque eſſe lineam rectam. Ex hoc facile intelligitur, in ſuperficie plana lineam breuiſſimam duo quaelibet puncta iungentem eſſe rectam, quae ab altero ad alterum ducitur. In ſuperficie ſphaerica, in qua linea recta duci non poteſt, ſtatuitur a Geometris viam breuiſſimam eſſe circulum maximum, qui data duo puncta coniungit.

2. Quae autem in ſuperficie quacunque ſiue conuexa, ſiue concaua, ſiue ex his mixta ſit via breviſſima, quae ex dato puncto ad aliud quodcunque ducitur, nondum eſt generaliter determinatum. Propoſuit mihi hanc quaeſtionem Cel. Ioh. Bernoulli, ſignificans ſe vniuerſalem inueniſſe aequationem, quae ad lineam breuiſſimam determinandam cuique ſuperficiei accommodari poſſit. Solui ego etiam hoc problema, ſolutionemque hac diſſertatione exponere volui.

3. Me-

3. Mechanice hoc problema facillime ſoluitur ope fili, quod per data duo puncta ductum tenditur, quantum fieri poteſt, hoc enim filum in ſuperficie propoſita deſignabit viam breuiſſimam. Neceſſe eſt autem, vt hoc filum vbique ſuperficiem tangat, quemadmodum ſi ſuperficies conuexa ſit, in ſuperficiebus quidem concauis non arcum curuae ſed chordam repraeſentabit. Hoc igitur in caſu filum ita applicari debet, vel applicatum concipi, vt ſemper ſuperficiem in parte conuexa tangat.

4. Hac vero conſtructione geometra contentus eſſe non poteſt, qui naturam huius lineae intimam perſpicere deſiderat, eamque, vt fieri ſolet, aequatione exponere. In mechanica autem conſtructione linea quaeſita tantum aſpectui exponitur, neque ex hoc natura eius poteſt perſpici. Propterea hic methodum ſum traditurus, qua pro omnibus ſuperficiebus, dummodo aequationibus exprimi poſſunt, linea breuiſſima determinari poteſt.

5. Ad hoc igitur opus eſt, vt ſuperficierum naturae aequationibus includantur; quo tota operatio analytice poſſit abſolui. Solent lineae curuae in eodem plano ſitae exprimi aequationibus inter duas coordinatas, ex quibus cuiusque puncti ſitus ſecundum longitudinem et latitudinem definitur. In ſuperficiebus autem tres conſiderandae ſunt poſitionum relationes, cum puncti cuiuslibet in ſuperficie locus ſecundum tres dimenſiones debeat eſſe determinatus. Tribus igitur in aequationibus ſuperficierum vti conuenit variabilibus; quarum vna locum

pun-

puncti ſecundum longitudinem, altera ſecundum latitudinem et tertia ſecundum altitudinem determinat.

Fig. 1. 6. Concipiatur planum, quod in figura congruit cum plano chartae, et quod horizontale appellabimus, in eoque recta pro lubitu ducta AP, quae tanquam axis erit conſideranda. Sit nunc M punctum cuiuspiam ſuperficiei extra hoc planum ſitum, demittatur ex eo in planum horizontale perpendiculum MQ plano in Q occurrens, et ex Q in lineam ſeu axem AP ducatur perpendicularis QP. Perſpicuum nunc eſt datis tribus lineis AP, PQ, et QM quantitate, ſitum puncti M fore determinatum.

7. Hae igitur tres lineae AP, PQ et QM nobis erunt indeterminatae, ex quibus cum conſtantibus aequatio pro ſuperficie punctis M terminata conficitur. Vocabimus AP, t PQ, x, et QM, y, atque pro qualibet ſuperficie, de qua quidquam quaeritur, oportet aequationem inter has indeterminatas inueſtigare. Simili deinceps modo ex huiusmodi aequationibus proprietates eruentur, quo ex aequationibus curuarum earum proprietates deriuantur. Vti ſi ſuperficies fuerit ſphaerica, cuius centrum in A et radius $=a$, erit aequatio eius naturam continens $aa=tt+xx+yy$.

8. Quemadmodum porro in linea curua certum punctum definitur vel determinato valore alterutri indeterminatae aſſignando, vel alia quadam aequatione cum aequatione locali coniungenda. Sic in ſuperficiebus, ſi quaedam trium indeterminatarum de-

ter-

terminatur, vel alia aequatio cum aequatione ſuperficiem definiente coniungitur; habebitur aequatio pro linea quadam in ea ſuperficie ſita, quae formatur interſectione datae ſuperficiei et alius noua aequatione expreſſae. Punctum denique fixum in ſuperficie conſtituetur, vel duabus indeterminatis determinandis, vel duabus nouis aequationibus adiungendis.

9. Quamobrem ad lineam breuiſſimaem in ſuperficie quacunque, cuius cognita eſt aequatio, ducendam aliam aequationem inueſtigabo, quae cum illa iuncta definit in ſuperficie ea lineam breuiſſimam quaeſitam. Ex his deinde duabus aequationibus omnia, quae ad ſitum lineae breuiſſimae cognoſcendum pertinent, elici poterunt. Proiectio ſcilicet in plano horizontali definietur aequatione, quae ex illis duabus prodit exterminata y. Proiectio in plano verticali horizontale in AP ſecantehabetur exterminanda x. Et proiectio in plano verticali et perpendiculari ad AP habetur eliminanda littera t.

10. Ad ſoluendum nunc hoc problema vti oportet *methodo maximorum et minimorum* prout ipſa quaeſtio poſtulat. Quaeritur autem in ſuperficie data inter omnes lineas eosdem terminos habentes ea, quae eſt minima. Proprietas haec minimi non ſolum in integram lineam quaeſitam competet, ſed etiam in ſingulas eius particulas; ita vt duo elementa eius contigua deſignent intra ſuos terminos viam breuiſſimam. Ex hoc igitur facilior naſcitur modus ad aequationem perueniendi.

11. Ad determinandam nunc poſitionem duorum elementorum viam intra ſuos terminos breuiſſimam conſtituentium ſequens praemitto lemma. Sint duo puncta fixa I et H et curua inter ea extenſa I K. Quaerendum eſt in ea punctum M tale, vt via (ductis rectis GM et MH) GM+MH ſit omnium, quae per alia puncta curuae IK duci poſſunt, minima. Notum eſt ex *methodo maximorum et minimorum* poni oportere, ſumto *m* puncto proximo ipſi M, $GM+MH=Gm+mH$, ex hacque aequatione inueniri locum puncti M, per quod tranſiens via GM+MH eſt minima.

Fig. 2.

12. Demiſſis ex punctis G, H, M, et *m* ad planum horizontale perpendiculis GE, HE, MP et *mp*, producatur *p*P in C eique iungatur normalis AC in plano eodem horizontali ſita, quae tanquam axis conſideretur; ad hancque ducantur perpendiculares EB et FD. Ponamus BC et CD eſſe aequales, tales enim in ſequentibus aſſumere licebit. Sint $BC=CD=a$; $BE=b$; $EG=c$; $DF=f$; $FH=g$. Sit porro $CP=x$ et $PM=y$, quae ſunt coordinatae curvae IK. Erit igitur $Cp=x+dx$ et $pm=y+dy$.

13. Ex his inuenietur $GM=\surd[a^2+(x-b)^2+(y-c)^2]$: eſt enim $GM^2=(PM-GE)^2+(CP-BE)^2+BC^2$. Similiter habebitur $HM=\surd[a^2+(f-x)^2+(g-y)^2]$ Tota igitur via GM+MH erit $=\surd[a^2+(x-b)^2+(y-c)^2]+\surd[a^2+(f-x)^2+(g-y)^2]$, quae ergo quantitas debet naturam minimi habere. Variabiles eius quantitates ſunt *x* et *y*, a quibus punctum M quaeſitum pendet. Differentietur igitur iſta quantitas exprimens

mens GM+MH, et, quod prouenit, ponatur $=0$. Orieturque haec aequatio, $\frac{(x-b)\,dx+(y-c)\,dy}{\sqrt{[a^2+(x-b)^2+(y-c)^2]}}$ $=\frac{(f-x)dx+(g-y)dy}{\sqrt{[a^2+(f-x)^2+(g-y)^2]}}$. Ex qua locus puncti M determinabitur.

14. Quia curua IK ponitur data, dabitur aequatio inter eius coordinatas x et y: Opus autem eſt tantum aequatione differentiali, propterea ponamus relationem elementorum dx et dy dari hac aequatione $Pdx=Qdy$, ſeu $dx:dy=Q:P$. Poſitis nunc his valoribus proportionalibus loco dx et dy, prodibit aequatio $\frac{(x-b)Q+(y-c)P}{\sqrt{(a^2+(x-b)^2+(y-c)^2)}}=\frac{(f-x)Q+(g-y)P}{\sqrt{(a^2+(f-x)^2+(g-y)^2)}}$ quae vacua eſt a differentialibus quantitatibus.

15. Conſideremus iam lineas GM et MH tanquam duo elementa lineae breuiſſimae in ſuperficie, in qua ſumta ſunt puncta G et H et curua IK, ducendae. Ponamus $AC=t$, ſuntque iam factae $CP=x$ et $PM=y$. Erit $BC=CD=a=dt$; $DF=f=x+dx$; $FH=g=y+dy$; $BE=b=x-dx+ddx$; $EG=c=y-dy+ddy$. Subſtituantur hi valores pro a, b, c, f et g in aequatione ſupra inuenta, orietur aequatio haec $\frac{Q(dx-ddx)+P(dy-ddy)}{\sqrt{(dt^2+(dx-ddx)^2+(dy-ddy)^2)}}=\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}}$

16. Aequatio haec aliud non ſignificat, niſi quod differentiale huius quantitatis $\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}}$ aequale ſit faciendum nihilo, poſitis P, Q et dt conſtantibus (dt quidem re ipſa conſtans ponitur.) Habebitur ergo ex hac differentiatione aequatio haec $(Qddx+Pddy)\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}=(Qdx+Pdy)$

 ($dxddx$

$(dxddx + dyddy) : \sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$. Quae in ordinem reducta abit in hanc $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

17. Introducamus nunc etiam in calcuium naturam ſuperficiei; quae aequatione inter tres coordinatas t, x et y commodiſſime exprimitur. Quia vero hic tantum vtimur aequatione differentiali, ſit ea $Pdx = Qdy + Rdt$. Ex hac elici debet aequatio pro curua IK, quippe quae in ſuperficie propoſita eſt ſita. Aequatio autem pro ea inuenitur ſi in aequatione ſuperficiei t ponitur aequalis conſtanti AC, i. e. Si ſit $dt = 0$. Proueniet itaque pro curua IK aequatio $Pdx = Qdy$, eadem, quae ſupra erat aſſumta. Propterea autem aequationem $Pdx = Qdy + Rdt$ aſſumſimus, vt ex ea altera reſultaret, atque ne nouis ſubſtitutionibus opus eſſet.

18. Ex his ergo duabus aequationibus in duabus praecedentibus paragr: datis, quarum altera eſt pro ſuperficie propoſita, altera ex natura minimi deducta, inueniri poterit linea breuiſſima in ſuperficie ducenda. Ad hoc coniungi debent duae illae aequationes ex iisque noua confici, quae tantum duas indeterminatas inuoluit. Haecque noua aequatio determinabit proiectionem quampiam lineae breuiſſimae in aliquo plano, quod ex coordinatis binis remanentibus cognoſcetur. Linea itaque breuiſſima quaeſita elicienda eſt ex his duabus aequationibus $Pdx = Qdy + Rdt$, et $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

19. Generalem hanc ſolutionem ad tria praecipua formarum ſuperficierum genera accommodabimus

bimus: quae ſunt cylindrica, conica et rotunda ſeu tornata. Ad genus cylindricum non tantum refero cylindros communes baſes circulares habentes, ſed omnia corpora, quorum ſectiones ad axem perpendiculares ſunt inter ſe aequales et ſimiles. Huius- Fig. 3.
modi cylinder ſit BHCFGD, cuius axis eſt linea AE. In hoc ſi ponatur abſciſſa in axe AQ$=t$, huicque perpendicularis quaecunque in plano horizontali BCFD ſumta QP$=x$ et verticalis PM ad ſuperficiem pertingens$=y$. Oportet vt cuicunque conſtanti aequali facta t ſemper eadem prodeat aequatio inter x et y.

20. Aequatio igitur pro huiusmodi ſuperficiebus erit $Pdx=Qdy$, in qua P et Q non inuoluunt litteram t. Si enim vel adeſſet tertius terminus Rdt vel P et Q a t penderent aequationes pro variis ſectionibus ad axem perpendicularibus variae prodirent, quod eſſet contra naturam corporum cylindricorum. Eadem igitur aequatio $Pdx = Qdy$ exprimet naturam baſis BHC. Facta enim in baſi hac AP$=x$ et PM $=y$, aequatio pro hac baſi erit etiam $Pdx=Qdy$. Pro cylindris igitur communibus, in quibus BHC eſt circulus, ſi A fuerit eius centrum erit $xdx=-ydy$.

21. Ad lineam nunc breuiſſimam in ſuperficiebus cylindricis determinandam loco aequationis generalis $Pdx=Qdy+Rdt$ hac vti debemus $Pdx=Qdy$, ſeu $P:Q=dy:dx$. His igitur proportionalibus loco P et Q in aequatione $\frac{Qddx+}{Qdx+} - \frac{Pddy}{Pdy} = \frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$, ſubſtitutis prodibit haec $\frac{dxddx+dyddy}{dx^2+dy^2} = \frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$, quae integrata dat $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = m\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}$,

cui aequiualet haec $dx^2+dy^2=nndt^2$. Conſequenter eſt $nt=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}+C$; ſeu t ſemper eſt proportionalis arcui in reſpondente ſectione transuerſa a linea breuiſſima abſciſſi, conſtante quapiam aucti vel minuti.

22. Sumamus loco aequationis $dx^2+dy^2=n^2dt^2$ hanc $dx^2+dy^2+dt^2=n^2dt^2$, licet enim pro n numerum quemlibet ſubſtituere, erit $nt=\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dt^2)}$. Ex quo intelligitur longitudinem lineae breuiſſimae eſſe vbique, vt reſpondentem abſciſſam in axe t. Ex ſuperiore aequatione autem $nt=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}+$ conſt. concluditur, ſi $n=o$ fore arcus in ſectionibus transuerſis a linea breuiſſima abſciſſos omnes aequales, et propterea lineam breuisſimam eſſe rectam in ſuperficie ductam et axi parallelam. Porro eſt etiam $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}+$ conſt. $=n\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dt^2)}$; in qua ſi $n=1$, erit linea breuiſſima ipſe perimeter ſectionis transuerſae.

23. Sit, transuerſa cylindri ſectio circulus axisque per centrum tranſeat, erit $xdx=-ydy$ ſeu $xx+yy=aa$; cum hac coniungatur aequatio $nt+b=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ſeu differentialis tantum $n^2dt^2=dx^2+dy^2$. Ex his aequationibus deriuetur noua y carens, quae proiectionem lineae breuiſſimae in plano horizontali determinabit. Prodibit autem $ndt=\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ ſeu $nt=\int\frac{adx}{(\sqrt{aa-xx})}$. Quae dat hanc conſtructionem: ſumta AQ$=t$ abſcindatur in baſi arcus HM$=nt$, eiusque ſinus AP erit aequalis applicatae QP et punctum P in proiectione, quae igitur eſt linea ſinuum.

24. Corpora conoidica hic mihi denotant ſolida

lida lineis rectis ex curuae cuiuslibet ſingulis punctis ad punctum fixum extra planum curuae aſſumtum ductis terminata. Haec in conos ordinarios abeunt ſi curuae illae fuerint ſectiones conicae. Huiusmodi corpus conoidicum ſit ACFDA, eius axis AQB, et planum horizontale ACD. Ponamus baſem CBDE eſſe perpendicularem ad axem AB. Manifeſtum nunc eſt, omnes ſectiones axi perpendiculares fore ſingulas ſimiles, et proportionales quadratis diſtantiarum a vertice A. Vocentur vt ante AQ, t; QP, x et PM, y. Fig. 4.

25. Quia omnes ſectiones transuerſae ſunt ſimiles, aequatio inter t, x et y talis eſſe debet, vt auctis vel minutis duabus harum coordinatarum tertia eadem ratione augeatur vel minuatur. Siue ſi in aequatione ponatur loco t, x et y hae nt, nx, et ny, vt aequatio immutata perſiſtat. Haec vero eſt proprietas aequationum homogenearum, in quibus t, x, et y vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. In his enim facta ſubſtitutione memorata in omnibus terminis n eandem habebit poteſtatem, et propterea ea diuiſione tolli poterit, et aequatio prior prodibit.

26. Hanc ergo corpora conoidica habent proprietatem, vt aequatio eorum inter t, x et y facta ſit homogenea, i. e. vt in ſingulis eius terminis idem ſit dimenſionum numerus ab indeterminatis t, x et y formatus. Si igitur ex hac aequatione quaeratur quid ſit t, reperietur t aequalis functioni ex x et y compoſitae homogeneae et vnius dimenſionis. Quamobrem $\frac{t}{x}$ aequabitur functioni ex x

et

y compoſitae etiam homogeneae et nullius dimenſionis.

27. Vocetur haec functio F; erit $\frac{t}{x} = F$. Differentiale vero huius functionis F habebit hanc formam $Mdx + Ndy$. In qua litterae M et N hanc habebunt inter ſe relationem, vt ſit $Mx + Ny = o$. Nam ponatur in functione F $y = qx$, mutabitur ea, quia eſt homogenea et nullius dimenſionis, in aliam, in qua tantum littera q occurret, neque x neque y amplius in ea reperietur. Propterea eius differentiale habebit hanc formam Ldq. Eſt vero $Ldq = \frac{Ldy}{x} - \frac{Lydx}{xx} = Mdx + Ndy$. Erit igitur $M = -\frac{Ly}{xx}$ et $N = \frac{L}{x}$. Ex quo apparet fore $Mx + Ny = o$. Habetur ergo $N = -\frac{Mx}{y}$ vel $M = -\frac{Ny}{x}$.

28. Quia eſt $\frac{t}{x} = F$; erit $\frac{xdt - tdx}{xx} = dF = Mdx + Ndy = -\frac{Nydx}{x} + Ndy$. Ex hac prodibit iſta aequatio $tdx - Nxydx = -Nxxdy + xdt$ quae comparata cum generali $Pdx = Qdy + Rdt$ dabit $P = t - Nxy$; $Q = -Nxx$; et $R = x$. Ex aequationibus vero duabus $tdx - Nxydx = -Nxxdy + xdt$ et $Mx + Ny = o$, inuenitur $N = \frac{xdt - tdx}{xxdy - xydx}$ et $M = \frac{yxdt - tydx}{xxydx - x^3 dy}$. Erit igitur $P = \frac{txdy - xydt}{xdy - ydx}$ et $Q = \frac{yxdt - tydx}{xdy - ydx}$. Factis his ſubſtitutionibus in aequatione generali $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ inuenietur haec aequatio $\frac{yxdtddx - tydxddx - txdyddy + xydtddy}{yxdtdx - tydx^2 + txdy^2 - xydtdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

29. Ad hanc aequationem reducendam pono $tt + xx + yy = zz$, et $dt^2 + dx^2 + dy^2 = ds^2$; erit

xdx

$xdx + ydy = zdz - tdt$, et $dx^2 + dy^2 = ds^2 - dt^2$. Porro $dxddx + dyddy = dsdds$, et $yddy + xddx = zddz + dz^2 - ds^2$. Ope horum valorum peruenitur ad hanc aequationem $\frac{zdtddz + dtdz^2 - dtds^2 - tdsdds}{zdzdt - tds^2} = \frac{dds}{ds}$. Ex hac erit $\frac{zdsddz + dz^2 ds - zdzdds}{ds^2} = ds$. Quae integrata dat $\frac{zdz}{ds} = s$ haecque iterum integrata hanc $ss = zz + C = tt + xx + yy + C$. Erit igitur longitudo lineae breviſſimae $s = \sqrt{(tt + xx + yy + C)}$. Et ex hac proprietate in quolibet caſu particulari determinabitur linea breuiſſima quaeſita. Pro cono recto, in quo omnes ſectiones transuerſae ſunt circuli, eſt $yy + xx = nntt$. Erit ergo $s = \sqrt{[(nn + 1)tt + C]}$.

30. Haec quae hactenus de linea breuiſſima ducenda in ſuperficiebus cylindricis tradidimus, alia methodo facilius inueniuntur ex ea horum corporum proprietate, quod eorum ſuperficies euolutione in planas transmutentur. Quae igitur linea in his planis eſt breuiſſima, erit etiam in ipſis ſuperficiebus cylindricis et conicis breuiſſima. Quare linea breuiſſima in huius modi ſuperficiebus hanc habere debet proprietatem, vt ſuperficiebus euolutis et in planas transmutatis linea breuiſſima transmutetur in rectam.

31. Haec vero methodus latius non patet, neque ad alias ſuperficies, quae non poſſunt euolutione in planas mutari, poteſt accommodari. Pro talibus vero methodus hac diſſertatione expoſita aeque ac pro illis valet. Vtamur igitur hac methodo in ſuperficiebus corporum rotundorum ſeu tornato-

rum, quae generantur circumrotatione cuiusque figurae circa axem immobilem; quemadmodum ſphaera generatur conuerſione ſemicirculi circa diametrum; conus rectus trianguli conuerſione circa alterutrum latus; cylinder rectus conuerſione parallelogrammi circa latus.

Fig. 5. 32. Sit huiusmodi corpus rotundum ABMC generatum conuerſione curuae AQC circa axem AQ. In eo ſit BMC ſectio transuerſa, quae erit circulus, cuius centrum in Q. Vocentur vt ante BQ, t; QP, x et PM, y. Aequatio inter has coordinatas hanc debebit habere proprietatem, vt poſito t conſtante ſeu $dt = o$, ea abeat in aequationem circuli $xx + yy =$ Conſt. ſeu $xdy = -ydy$. Quamobrem aequatio pro ſolidis rotundis eſt $xx + yy = T$ vbi T denotat functionem quamcunque ipſius t et conſtantium. Haec igitur differentiata dat $xdx = -ydy + Rdt$, in qua RQ ſolis t et conſtantibus pendet.

33. Hac aequatione in generali §. 10 $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ ſubſtitutis orietur aequatio iſta $\frac{xddy - yddx}{xdy - ydx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$. Cuius integralis aequatio eſt $l(xdy - ydx) = l\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)} + la$, vel $xdy - ydx = a\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$. Haec ſi coniungatur cum aequatione naturam ſuperficiei exprimente $xdx = -ydy + Rdt$ determinabit lineam breuiſſimam.

34. Litera a eſt arbitraria ſeu pendet a loco punctorum per quae linea breuiſſima tranſire debet. Si ponatur $a = o$; erit $xdy = ydx$ atque $y = nx$. Vnde cognoſcitur peripheriam curuae circa axem rotatae

in

in quolibet ſitu repraeſentare lineam breuiſſimam inter ſuos terminos. Hic ergo caſus valet, ſi duo puncta inter quae linea breuiſſima duci debet, ſunt cum axe in eodem plano. Ex hiſce apparet in ſphaera lineam breuiſſimam ſemper eſſe circulum maximum: quia ſphaera conuerſione circuli circa diametrum generatur, et ſibi vbique eſt aequalis et ſimilis.

35. Ad aequationem tractabiliorem efficiendam pono $xx+yy=zz$, et $dx^2+dy^2=ds^2$; erit $xdx+ydy=zdz$. Ex his apparet fore $zzds^2-zzdz^2=(xdy-ydx)^2$. Quare cum ſit $xdy-ydx=a\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}$, erit $z^2ds^2-zzdz^2=aadt^2+aads^2$ atque $ds=\sqrt{\left(\frac{zzdz^2-aadt^2}{zz-aa}\right)}$. Si vlterius ponatur elementum ipſius lineae breuiſſimae $=dv$, erit $dv=\sqrt{(ds^2+dt^2)}=z\sqrt{\left(\frac{dz^2+dt^2}{zz-aa}\right)}$. Etſi hic duae variabiles z et t occurrere videntur, tamen in quolibet caſu ex aequatione pro ſuperficie determinabitur t in z, et longitudo lineae breuiſſimae ſaltem per quadraturas cognoſcetur.

36. Haec ſunt tria praecipua corporum genera in quorum ſuperficiebus lineas breuiſſimas delineandi methodus hic fuſius eſt tradita. Habent hi caſus hanc prae aliis proprietatem, vt generalis aequatio ad hos accommodata reduci poſſit ad differentialem primi gradus. Ex his vero alii ſe produnt caſus ſimiliter integrationem admittentes. Vt pro corporibus cylindricis aequatio eſt $Pdx=Qdy$. In qua P et Q ab x et y pendere dicta ſunt. Perſpicuum autem eſt reductionem aeque ſuccedere, ſi P et Q etiam

iam a t penderent, quo in caſu aequatio non eſt amplius pro corporibus cylindricis. Simili modo in aequatione pro corporibus rotundis $xdx = ydy + Rdt$, R tantum a t pendet. Si igitur R etiam x et y in ſe comprehendat, aequatio erit pro nouo ſuperficierum genere, et nihilominus reductionem admittit,

Propoſuit mihi hanc quaeſtionem Cel. Ioh. Bernoulli, poſtquam ipſi hanc meam ſolutionem ſcripſiſſem, vt nimirum praeter tria expoſita ſuperficierum genera alia inueſtigarem, quae etiam ad aequationes integrabiles perducant. Solutionem igitur huius quaeſtionis, quia tam facile ex antecedentibus fluit, hic adiungere volui.

NOVA METHODVS
INNVMERABILES AEQVATIONES DIFFERENTIALES SECVNDI GRADVS REDVCENDI AD AEQVATIONES DIFFERENTIALES PRIMI GRADVS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

M. Sept. 1728. QVando ad aequationes differentiales ſecundi vel altioris cuiuspiam gradus perueniunt analyſtae, in iis reſoluendis duplici modo verſantur. Primo inquirunt, an in promtu ſit eas integrare: id ſi fuerit, obtinuerunt

runt, quod deſiderabant. Cum autem integratio vel prorſus impoſſibilis, vel ſaltem difficilior videtur, conantur eas ad differentiales primi gradus reducere; quippe de quibus facilius iudicari poteſt, an conſtrui queant; nullaeque aequationes differentiales, niſi primi gradus, adhuc cognitis methodis conſtrui poſſint. Quod ad illud attinet, de eo hac diſſertatione explicare non eſt propoſitum; quomodo autem aequationes differentiales altiorum graduum praeſertim vero ſecundi ad differentiales primi gradus ſint reducendae, methodum quandam adhuc inuſitatam, et quae latiſſime patet in ſequentibus ſum expoſiturus.

2. Iam quidem ſaepenumero Mathematici, quando aequationes differentiales ſecundi vel altiorum graduum occurrerunt, eas ad differentiales primi gradus reduxerunt, atque deinde conſtruxerunt; quemadmodum videre licet in conſtructionibus catenariae, elaſticae, proiectoriae in medio quocunque reſiſtenti pluriumque aliarum curuarum, quarum aequationes primo differentiales ſecundi vel tertii gradus ſunt inuentae. Pleraeque quidem earum reipſa integrabiles ſunt, ſed tamen eas facilius erat integrare, poſtquam ad differentiales primi gradus fuerant reductae. Earum autem aequationum ratio ita eſt comparata, vt vel vtraque vel ſaltem alterutra indeterminata ipſa deſit, earum eiusue differentialibus et differentio - differentialibus aequationes tantum ingredientibus.

3. Si autem in aequatione differentio - diffe-

rentiali alterutra indeterminata caret: facile eſt eam ad ſimpliciter differentialem reducere ſubſtituendo loco differentialis quantitatis deficientis factum ex noua quadam indeterminata in alterum differentiale. Hac enim ratione, ſi conſtans quoddam differentiale fuerit poſitum, differentio-differentiali aequale inuenitur ſimpliciter differentiale; quo ſubſtituto aequatio habetur differentialis primi gradus. Vt in hac aequatione $Pdy^n = Qdv^n + dv^{n-2}\, ddv$, vbi P et Q ſignificant functiones quaſcunque ipſius y, atque dy conſtans ponitur. Quia ipſa v non ingreditur aequationem, fiat $dv = zdy$, erit $ddv = dzdy$. His ſubſtitutis iſta oritur aequatio $Pdy^n = Qz^n dy^n + z^{n-2}\, dy^{n-1}\, dz$, diuiſaque hac per dy^{n-1} iſta $Pdy = Qz^n\, dy + z^{n-2}\, dz$; quae eſt ſimpliciter differentialis.

4. Alias aequationes differentio differentiales, niſi huiuſmodi, nemo adhuc, quantum ſcio, ad differentiales primi gradus vnquam reduxit, niſi forte in promtu fuerit eas prorſus integrare. Hic autem methodum exponam, qua non quidem omnes, ſed tamen innumerabiles aequationes differentio-differentiales vtut ab vtraque indeterminata affectae ad ſimpliciter differentiales reduci poterunt. Ita vero in iis reducendis verſor, vt eas certa quadam ſubſtitutione in alias transformem, in quibus alterutra indeterminata deeſt. Quo facto ope ſubſtitutionis §. praeced. expoſitae eae aequationes penitus ad differentiales primi gradus reducentur.

5. Cum obſeruaſſem eam eſſe quantitatum exponentialium, ſeu potius earum dignitatum, quarum

rum exponens eſt variabilis manente quantitate elevata conſtante, proprietatem, vt ſi differentientur, denuoque differentientur, ſemper variabilis finita ipſa nonniſi exponentem afficiat; atque differentialia ſint facta ex ipſo integrali in differentialia exponentis. Quantitas huiusmodi eſt c^x vbi c denotet numerum, cuius logarithmus eſt vnitas; erit eius differentiale $c^x dx$, differentio - differentiale $c^x(ddx + dx^2)$, vbi x nonniſi in exponentem ingreditur. Haec conſiderans perſpexi, ſi in aequatione differentio-differentiali loco indeterminatarum huiusmodi exponentialia ſubſtituantur: tum ipſas variabiles tantummodo in exponentibus ſuperfuturas eſſe. Quo cognito oportet, vt ea exponentialia loco indeterminatarum ſubſtituenda ita accommodentur, vt facta ſubſtitutione, ea diuiſione tolli queant; hoc modo alterutra ſaltem indeterminata ex aequatione eliminabitur, eiusque duntaxat differentialia ſupererunt.

6. Haec quidem operatio non in omnibus aequationibus ſuccedit; verumtamen eam tria aequationum differentialium 2^{di} gradus genera admittere obſeruaui. Primum genus eſt omnium earum aequationum, quae nonniſi duobus conſtant terminis. Alterutrum eas comprehendit aequationes, in quarum ſingulis terminis indeterminatae aequalem dimenſionum numerum conſtituunt: neque vero indeterminata ipſa ſolum, ſed etiam eius differentialia cuiusque gradus dimenſionem vnam conſtituere exiſtimanda ſunt. Ad tertium genus eas refero aequationes,

in

in quarum ſingulis terminis alterutra indeterminata eundem obtinet dimenſionum numerum; quorſum eadem pertinent, quae modo de aeſtimatione dimenſionum allata ſunt. Omnes igitur aequationes ad haec tria genera pertinentes hic reducere docebo.

7. Omnes aequationes ad primum genus pertinentes ſub hac generali formula comprehenduntur: $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, vbi dx conſtans ponitur. Etſi enim in aequatione quapiam neque dx neque dy conſtans accipiatur; ſed aliud quoddam differentiale inde pendens, id nihil difficultatis habet, cum cognita ſit methodus, quod conſtans erat differentiale, variabile faciendi et vice eius aliud quoddam conſtans. Ad hanc vero aequationem reducendam pono $x = c^{\alpha v}$, et $y = c^v t$. Erit $dx = \alpha c^{\alpha v} dv$, et $dy = c^v(dt + tdv)$. Atque hinc $ddx = \alpha c^{\alpha v}(ddv + \alpha dv^2)$ et $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + tddv + tdv^2)$. Sed cum dx ponatur conſtans erit $ddx = o$, adeoque $ddv = -\alpha dv^2$. Hoc ſubſtituto loco ddv, habebitur $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + (1-\alpha) tdv^2)$. Surrogentur hi valores loco x et y in aequatione propoſita, transformabitur ea in hanc $ac^{\alpha v(m+p)} \alpha^p dv^p = c^{(n+p-1)v} t^n (dt + tdv)^{p-2}(ddt + 2dtdv + (1-\alpha) tdv^2)$.

8. Iam α determinari debet ita, vt exponentialia diuiſione tolli poſſint. Hoc vt fiat, oportet ſit $\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$, inde colligitur $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$. Superior igitur aequatio determinato α abibit in ſequentem $a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p dv^p = t^n(dt + tdv)^{p-2}(ddt + 2dtdv + \frac{m-n+1}{m+p} tdv^2)$. Quae protinus ex propoſita eruta fuis-

ſuiſſet, ſi poſuiſſem $x = c^{(n+p-1)v:(m+p)}$, et $y = c^v t$. Eſt autem $n+p-1$ numerus dimenſionum, quas y conſtituit; et $m+p$ quas x. Facile ergo in quouis caſu particulari α determinatur ſtatimque debita ſubſtitutio habebitur. In aequatione inuenta, cum abſit v, ponatur $dv = zdt$, erit $ddv = zddt + dzdt$, ſed $ddv = -\alpha dv^2 = \frac{1-n-p}{m+p} z^2 dt^2$. Hinc inuenitur $ddt = \frac{-dzdt}{z} + \frac{1-n-p}{m+p} zdt^2$. His ſubſtitutis emergit $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^p dt^p = t^n (dt + tzdt)^{p-2} (\frac{1-n-p}{m+p} zdt^2 - \frac{dzdt}{z} + 2zdt^2 + \frac{m-n+1}{m+p} tzzdt^2)$. Quae diuiſa per dt^{p-1} dabit $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^p dt = t^n (1+tz)^{p-2} (\frac{1+2m-n+p}{m+p} zdt - \frac{dz}{z} + \frac{m-n+1}{m+p} tz^2 dt)$.

9. Reducta ergo eſt aequatio generalis propoſita $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$ ad hanc differentialem primi gradus $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^{p+1} dt = tz^n (1+z)^{p-2} (\frac{1+2m-n+p}{m+p} z^2 dt + \frac{m-n+1}{m+p} tz^3 dt - dz)$, multiplicata aequatione inuenta per z. Haec aequatio vnico actu ex ea inueniri poteſt, poſito in prima ſubſtitutione loco v hoc $\int zdt$. Fieri ergo debet $x = c^{(n+p-1)\int zdt:(m+p)}$ et loco y poni debet $c^{\int zdt} t$ ſiue quod eodem redit, ponatur $x = c^{(n+p-1)\int zdt}$ et $y = c^{(m+p)\int zdt} t$. Si ex aequatione differentiali inuenta iterum propoſita differentialis ſecundi gradus inueniri debeat, videamus quales loco z et t ſubſtitutiones adhiberi debeant. Cum ſit $x = c^{(n+p-1)\int zdt}$ erit $t^{\int zdt} = x^{1:(n+p-1)}$: quare $y = x^{(m+p).(n+p-1)} t$. Vnde habetur $t = yx^{-(m+p):(n+p-1)}$. Deinde quia $c^{\int zdt} = x^{1:(n+p-1)}$ erit $\int zdt = \frac{1}{n+p-1} lx$; ergo $zdt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$. Sed eſt $dt = x^{-(m+p):(n+p-1)} dy - \frac{(m+p)}{n+p-1} yx^{-(m-n-2p+1):(n+p-1)} dx$. Conſequenter inuenietur

$z = dx : [(n+p-1)\, x^{-(m-n+1):(n+p-1)}\, dy - (m+p)\, y\, x^{-(m+p):(n+p-1)} dx]$. Perſpicuum autem eſt, ſi z in t vel t in z detur etiam relationem, quam x et y inter ſe habeant, inveniri poſſe.

10. Illuſtremus haec, quae generaliter inventa ſunt exemplo quodam particulari. Sit $xdxdy = yddy$, quae reducitur diuidendo per dy, ad ad hanc $xdx = ydy^{-1}ddy$. Huic generali accommodata, habebitur $a=1, m=1, p=1, n=1$. Subſtitutis his in aequatione differentiali primi gradus, habebitur ea, ad quam propoſita reducitur, $\frac{1}{2}zdt = t(1+tz)^{-1}(\frac{3}{3}z^2dt + \frac{1}{2}tz^3dt - dz)$, quae abit in $z^2dt + tz^3dt = 3tz^2dt + t^2z^3dt - 2tdz$. Ad hanc aequationem propoſita $xdxdy = yddy$ reducitur, ſi fiat $x = c^{\int zdt}$ et $y = c^{2\int zdt}t$. Conſtructio ergo aequationis propoſitae pendet a conſtructione aequationis differentialis inuentae; haec ſi conſtrui poterit, et ea conſtructur; ſi fuerit reipſa integrabilis, ea quoque integrari poterit.

11. Secundum genus aequationum differentio-differentialium, quas mea methodo ad differentiales primi gradus reducere poſſum, eas complectitur, quae in ſingulis terminis eundem dimenſionum, quas indeterminatae earumque differentialia conſtituunt, numerum tenent. Aequatio generalis huc pertinens eſt ſequens $ax^my^{-m-1}dx^pdy^{2-p} + bx^ny^{-n-1}dx^qdy^{2-q} = ddy$. In huius ſingulis terminis eſt vnica dimenſio indeterminatarum: poniturque dx conſtans. Etſi vero aequatio haec aſſumta tribus tantum conſtat terminis: tamen quodcunque libuerit inſuper adiici poſſunt, operatio enim

ea-

eadem manet. Poſſent adhuc addi $ex^{r}y^{-n-1}dx^{q}$ dy^{2-q} et huiusmodi quotquot libuerit; prout exempla particularia, ad quae reducenda generalis accommodari debet, pluribus paucioribusue conſtant terminis. Tres vero terminos, vt dixi, asſumſiſſe ſufficit: cum plures alium reducendi modum non requirant.

12. Aequationem propoſitam reduco ſubſtituendis loco z, c^{v} et loco y, $c^{v}t$. Cum igitur ſit $x = c^{v}$ et $y = c^{v}t$; erit $dx = c^{v}dv$ et $dy = c^{v}(dt + tdv)$: porroque $ddx = c^{v}(ddv + dv^{2})$ et $ddy = c^{v}(ddt + 2dtdv + tdv^{2} + tddv)$. Quia vero dx ponitur conſtans, erit $ddx = 0$, hinc igitur $ddv = -dv^{2}$, hanc ob rem habebitur $ddy = c^{v}(ddt + 2dtdv)$. Ponantur hi valores in aequatione loco $x, y, dx.dy$ et ddy, transformabitur ea in ſequentem: $ac^{v}t^{-m-1}dv^{p}(dt + tdv)^{2-p} + bc^{v}t^{-n-1}dv^{q}(dt + tdv)^{2-q} = c^{v}(ddt + 2dtdv)$. Quae diuiſa per c^{v} abibit in hanc $at^{-m-1}dv^{p}(dt + tdv)^{2-p} + bt^{-n-1}dv^{q}(dt + tdv)^{2-q} = ddt + 2dtdv$. In hac cum deſit v pono $dv = zdt$ erit $ddv = zddt + dzdt$, ſed $ddv = -dv^{2} = -z^{2}dt^{2}$ ergo $ddt = -zdt^{2} - \frac{dzdt}{z}$. Hinc iſta obtinebitur aequatio, $at^{-m-1}\; z^{p}dt^{p}(dt + ztdt)^{2-p} + bt^{-n-1}\; z^{q}dt^{q}(dt + ztdt)^{2-q} = zdt^{2} - \frac{dzdt}{z} + 2zdt^{2}$ ſeu haec ordinatior $at^{-m-r}z^{p}dt(1 + zt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^{q}dt(1 + zt)^{2-q} = zdt - \frac{dz}{z}$.

13. Aequatio haec differentialis primi gradus vnico actu ex propoſita elici potuiſſet, ſi ſtatim poſitum eſſet $x = c^{\int zdt}$ et $y = c^{\int zdt}t$; vnde foret $dx = c^{\int zdt}zdt$ et $dy = c^{\int zdt}(dt + tzdt)$; atque $ddx = c^{\int zdt}(zddt + dzdt + zzdt^{2}) = 0$. quare $ddt = -zdt^{2} - dzdt:z$. Hoc in vſum vocato habebitur $ddy = c^{\int zdt}(zdt^{2} - dzdt:z)$. Propoſitum ſit hoc exemplum $y^{\alpha+1}ddy = x^{\alpha}dx^{2}$, mutetur id in $ddy = x^{\alpha}y^{-\alpha-1}dx^{2}$. Collato hoc cum genera-

rali aequatione fiet $a=1$, $b=0, m=\alpha, p=2$. Si ergo hoc exemplum, vt generalis formula, reducatur, haec inuenietur aequatio $t^{-\alpha-1}z^2dt = zdt-dz:z$. Siue haec $t^{-\alpha-1}z^3dt=z^2dt-dz$. Quae ſi conſtructionem admitteret, et differentialis ſecundi gradus ex ea conſtrui poſſet. Notandum eſt, ſemper fere ad eiusmodi aequationes differentiales perveniri, quae admodum difficulter vel prorſus non conſtrui queant.

14. Aſſumo aliud exemplum, $xdxdy-ydx^2=y^2ddy$, quod ad modum generalis aequationis hanc induit formam $xy^{-2}dxdy-y^{-1}dx^2=ddy$. Reducatur huc generalis aequatio, et erit $\alpha=1$, $m=1$, $p=1$, $b=-1$, $n=0$, $q=2$. Reſpondet ergo exemplo propoſito ſequens aequatio differentialis $t^{-2}zdt(1+zt)-t^{-1}z^2dt=zdt-dz:z$. Multiplicetur haec per t^2z, habebitur $z^2dt+z^3tdt-z^3tdt=z^2t^2dt-t^2dz$ ſiue $z^2dt=zt^2dt^2-t^2dz$, quae ſeparata dat $dz:z^2=dt(t^2-1):tt$ et integrata hanc $-1:z=t+1:t-a$ ſiue $atz-t=t^2z+z$. Eſt vero $z=dv:dt$. Itaque $atdv-tdt=t^2dv+dv$. ſeu $dv=tdt:(at-tt-11)$. Quia vero $c^v=x$ erit $v=lx$ et $t=y:x$ ergo $dv=dx:x$ et $dt=(xdy-ydx):xx$ conſequenter $ydy+xdx=aydx$. Haec aequatio iterum integrari poteſt, eum vero tantum noto caſum, quod ſi $a=0$ ea tranſeat in aequationem circuli.

15. Accipio nunc caſum, quo plures, quam in generali aequatione, ſint termini $yydx^3+xxdy^3$ $yxdxdy^2-yxdx^2dy+yx^2dxddy-y^2xdxddy=0$. Hoc exemplum modo ſupra expoſito reducere licebit. Cum dx ponatur conſtans, maneant eaedem ſubſtitutiones ſcilicet, $x=c^v. y=c^vt; dx=c^vdv; dy=c^v$

(dt

$(dt+tdv)$ et $ddy=c^v(ddt+2dtdv)$. Eſt vero $ddv=-dv^2$. His ſubſtitutis atque aequatione proueniente ordinata, inuenitur $dt^3+2tdt^2dv-ttdtdv^2+tdtdv^2+tdvddt-ttdvddt=0$. Hic cum deſit v, ponatur $dv=zdt$, erit vt ante $ddt=-zdt^2-dzdt:z$. Exinde reperitur haec aequatio in ordinem reducta, $dt+2tzdt-tdz+ttdz=0$. Quae, cum z vnicam tantum habeat dimenſionem ſeparari poteſt methodo a Cel. Ioh. Bernoulli in Actis Lipſ. tradita. Sed ſine vlla ſubſtitutione eam eique ſimiles quascunque ſtatim integrare ſeu ad integralem formam ſolum reducere poſſum, ſequenti modo.

16. Reducatur aequatio noſtra ad hanc $dz+\frac{2zdt}{t-1}+\frac{dt}{tt-t}=0$, vt dz nullo affectum ſit coefficiente tum ſumatur id, quo z eſt affectum, nempe $\frac{2dt}{t-1}$ cuius integrale exprimatur per $2\int\frac{dt}{t-1}$. Iam aequatio propoſita multiplicetur per $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}$ et habebitur $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}dz+\frac{2c^{2\int\frac{dt}{t-1}}zdt}{t-1}+\frac{c^{2\int\frac{dt}{t-1}}dt}{tt-t}=0$. Nunc autem aequatio integrabilis eſt facta, duorum enim priorum terminorum integrale eſt $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}z$. Eſt igitur $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}z+\int\frac{c^{2\int\frac{dt}{t-1}}dt}{tt-t}=a$. Sed cum ſit $\int\frac{dt}{t-1}=l(t-1)$ erit $c^{2\int\frac{dt}{t-1}}=(t-1)^2$. Ergo $(t-1)^2z+\int\frac{(t-1)dt}{t}=a$, hincque $(t-1)^2z+t-lt=a$. Hoc modo omnes aequationes differentiales in quibus alterutra variabilis vna plures dimenſiones nusquam habet, integrari ſeu

 ſal-

ſaltem conſtruibiles redduntur. Hac de induſtria methodo ſum vſus, quo magis intelligatur quanti ſint vſus exponentialia in tractandis aequationibus.

17. Aequatio ad quam eſt peruentum haec eſt $(t-1)^2 z + t - lt = a$. Haec vlterius reducatur, vt tandem aequatio inter x et y rurſus obtineatur: quoniam erat $dv = zdt$ erit $z = dv : dt$: quamobrem aequatio abibit in $(t-1)^2 dv + tdt - dtlt = adt$ haec vero in $dv = \frac{adt - tdt + dtlt}{(t-1)^2}$. Quae denuo integrationem admittit; integrata vero hanc habet formam $v = \frac{-c + t - tlt}{t-1}$, conſtante vero addita hanc $v = \frac{b - a + t - bt - tlt}{t-1}$. Quia vero eſt $x = c^v$; erit $v = lx$. Et cum ſit $y = c^v t$ erit $y = tx$ et ideo $t = y : x$. His ſubſtitutis habebitur ſequens aequatio $lx = \frac{bx - ax + y - by - yly + ylx}{y-x}$. Vnde oritur haec $(b-a)x + (1-b)y = yly - xlx$. Ponatur breuitatis cauſa $b - a = f$, et $1 - b = g$; erit $fx + gy = yly - xlx$. Quae eſt integralis aequatio propoſitae §. 15. Si fiat $f = o$, et $g = o$, erit $yly = xlx$. Ex qua ſumendis numeris reperitur haec $y^y = x^x$.

18. Tertium genus aequationum quarum hic reducendarum methodum trado, eas complectitur, in quarum ſingulis terminis alterutra indeterminata eundem tenet dimenſionum numerum. Hic duo diſtinguendi ſunt caſus, prout vel ipſius illius variabilis vbique eundem dimenſionum habentis differentiale conſtans ponitur vel ſecus. Ad primum caſum ſpectat ſequens aequatio vniuerſalis $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m+2-b} = dx^m ddy$. In qua x in ſingulis terminis m habet dimenſiones, et dx ponitur conſtans. Significant autem P et Q functiones quaſcunque

que ipſius y. Ad hanc reducendam vnica ſubſtitutione opus eſt : nempe fiat $x = c^v$ erit $dx = c^v dv$ et $ddx = c^v(ddv + dv^2) = 0$. ergo $ddv = -dv^2$. His ſubrogatis habetur $Pdy^{m+2} + Qdv^b dy^{m+2-b} = dv^m ddy$. Poſtquam nimirum diuiſa eſt per c^{mv}.

19. Cum in aequatione inuenta v non deprehendatur reducetur ſubſtituendo loco dv, zdy. Erit $ddv = zddy + dydz = -dv^2 = -z^2dy^2$. Hinc inuenietur $ddy = -zdy^2 - dydz:z$. ſubſtituantur ergo in aequatione inuenta loco dv et ddy hi valores reperti et habebitur haec aequatio $Pdy^{m+2} + Qz^b dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$. Quae diuiſa per dy^{m+1} abit in hanc $Pdy + Qz^b dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$. Quae eſt primi gradus, vt erat propoſitum. Ad hanc ſtatim perueniri potuiſſet, ſi poſitum eſſet $x = c^{\int zdy}$. Vnde foret $dx = c^{\int zdy} zdy$ et $ddx = c^{\int zdy}(zdy^2 + dzdy + zddy) = 0$ et hinc $ddy = -zdy^2 - dzdy:z$. Hi valores loco x, dx, ddy ſubſtituti ſtatim inuentam aequationem praebent.

20. Alter caſus aequationum ad genus tertium pertinentium reſpicit ſequentem generalem aequationem. $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m-b+1} = dx^{m-1} ddx$. In qua aequatione dy ponitur conſtans, P et Q deſignant functiones ipſius y quaſcunque. Et vt perſpicuum eſt x in ſingulis terminis m tenet dimenſiones. Ponatur, vt ante, $z = c^v$; erit $dx = c^v dv$, et $ddx = c^v (ddv + dv^2)$. Hiſce in aequatione ſubſtitutis, reſultat haec aequatio diuiſione facta per c^{mv}, $Pdy^{m+1} + Qdv^b dy^{m-b+1} = dv^{m+1} + dv^{m-1} ddv$. Haec aequatio, vt vlterius reducatur, cum v deſit, ponatur $dv = zdy$

erit

erit ob dy conſtans $ddv = dzdy$. Hanc ob rem aequatio vltima transmutabitur in $Pdy^{m+1} + Qz^b dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$. Haec autem, ſi diuidatur per dy^m, dabit iſtam $Pdy + Qz^b dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$. Pendet ergo conſtructio propoſitae aequationis a conſtructione huius inuentae.

21. Ex hiſce, arbitror, intelligitur, quomodo aequationes differentiales ſecundi gradus ad vnum aliquod trium expoſitorum genus pertinentes tractari oporteat. Facile quidem concedo raro admodum ad tales aequationes perueniri, in quibus non alterutra indeterminata deſit; Tamen a nemine hoc nomine vtilitatem huius inuenti impugnatum iri puto. Fieri poteſt, vt nouus aliquis campus aperiatur problemata ſuggerens quorum reſolutio ad aequationes tales deducat. Memini me aliquando phyſicum problema quoddam reſoluentem ad hanc perveniſſe aequationem $y^2 ddy = xdxdy$. Qua tum temporis neque a me neque ab aliis, cum quibus communicaueram, vllo modo reduci potuerat. Nunc vero, cum et ad primum et ad ſecundum genus pertineat, reductio facile ſucceſſit vt ex §. 10 videre licet.

22. Hoc vero praeterea de aſſumenda conſtante monendum duxi: In aequationibus ad ſecundum genus relatis nihil intereſt, quodcunque differentiale conſtans ſit aſſumtum. Poteſt id eſſe vel differentiale alterutrius variabilis, vel aliud differentiale ex vtriusque variabilis differentialibus vt libet compoſitum, modo id ſit, vt natura rei exigit, homogeneum

neum. Illud quidem in generali exemplo locum obtinuit; ſed ex illa operatione ſimul intelligitur, quomodo, ſi differentiale conſtans ſit qualecunque, aequationes tractari oporteat. Aliter res ſe habet in duobus reliquis generibus primo et tertio; ibi enim neceſſe eſt, vt alterutrius variabilis differentiale conſtans ſit poſitum. Id ſinon fuerit methodo expoſita reductio non ſuccedit. Hic vero in caſibus conſtans debet immutari, et aequatio in aliam transformari, in quâ alterutrius variabilis differentiale ſit conſtans.

23. Methodus in hac diſſertatione expoſita aequationes differentiales ſecundi gradus ad ſimpliciter differentiales reducendi conſiſtit in idonea ſubſtitutione quantitatum exponentialium pro indeterminatis. Ea vero adhuc latius patet, quam hic eſt expoſitum. Poſſunt eius beneficio infinitae aequationes differentiales tertii ordinis ad alias, quae ſint tantum ſecundi ordinis reduci. Et generaliter aequationes differentiales ordinis n. ad alias reducentur, quae ſint ordinis tantum $n-1$. Aequationum vero cuiusque ordinis differentialium, quae hac methodo reducuntur, quoque ſunt tria genera conſtituenda, eademque, quae hic ſunt expoſita. Ex his igitur etiam intelligitur, quantum huiusmodi ſubſtitutiones in aequationibus differentialibus primi gradus tractandis vſum habere poſſint. Sed de his non opus eſt plura exponere.

EXPLICATIO
INVENTI HYDROSTATICI
DE PONDERE ARGENTI CVPRO MIXTI INVESTIGANDO,

hactenus
Theoretice explicati et in calculo demonſtrati,
ſed praxin omnem eludentis,
nunc
ad praxin perducti et re ipſa ante oculos poſiti
per

Ioh. Georg Leutmann.

1.

M. Mart. 1728. Tab. VIII. INſignem in hydroſtaticis vſum bilancis recens inuentae, qua mediante ponderi octies maiori, reſpondet onus octies minus, eique aequilibre eſt, hic explicabo.

Deſcripta extat bilanx Comment. Societ. Petropol. Tom. II. p. 64. eamque Petersburgicam a loco inuentionis nominare placuit.

2. Notum eſt problema hydroſtaticum: Data maſſa metalli ex duobus diuerſis mixti inuenire per librationem in aqua vtriusque quantitatem, ſi differentia inter vtrumque fuerit nota. vid. Wolff. Elem. Math. Tom. I. Hydroſt. p. 717.

3. Ad vſum hoc poſſet accommodari ſi metallorum differentia in minori metalli volumine per bilancem librato, prodiret ſenſibilis.

4. Quia

4. Quia vero differentia eſt valde exigua e. g. in ☽ et ♀ vt bilanx eam non prodat, hinc per calculum quidem ea poteſt exprimi hypothetice, ſcil. ſi haec vel illa quantitas argenti tanto cupro erit permixta, tunc hoc vel illud pondus, ponderato in aqua metallo mixto, emergere debet. Quae tamen differentia euaneſcit in bilance et in ſenſus propter exiguitatem non incurrit.

5. Id quod expertus etiam eſt eruditus Italus Corradi nel Giornale de Letterati d'Ital. qui in hoc problemate ad praxin perducendo operam fruſtra ſe impendiſſe ingenue fatetur.

6. Siquidem iuxta data Senguerti (vid. §. 22.) maſſa ☽ ♀ 16. L. grauis, in qua

15 L. ☽ } = 288 græn. in aqua aequiponderan-
1 L. ♀ } tur $260\frac{50}{554}$ gr.
14 L. ☽ } = 288 græn. in aqua aequiponderan-
2 L. ♀ } tur $259\frac{1621}{2216}$ gr.

Haec mixta diuerſa nullam ſenſibilem differentiam in bilance indicant quanquam notabile diſcrimen in iis ſit valoris. Multo minus differentia perceptibilis eſt in bilance, ſi cum primo exemplo comparentur ſequentia

14 L. 17 græn. ☽ } = 288 græn, in aqua aequi-
1 L. 1 græn. ♀ } pond. $260\frac{39}{554}$ græn.

vbi tam exigua eſt differentia, vt plane in bilance euaneſcat ſcil. $\frac{11}{554}$ græn, quae omnino in bilance abſorbetur, et tantum calculo exprimi poteſt, maxime quia aqua longe difficiliorem motum lanci concedit quam aer.

Et quid dicam de moneta $3\frac{7}{8}$ græna ſeu granilla (non grana) pendente, quis hic differentiam per bilancem obſeruare poterit.

7. Ex eo eſt quod nullum vſum practice hoc problema habeat in determinanda quantitate ☽ et ♀ inuicem certa proportione mixtis, quia differentia in volumine minori diſparet, in maiori maiorem bilancem requirente non indicatur, talis enim bilanx maior vix inuenietur, quae ſuo officio in hoc paſſu recte fungatur.

8. Si vero talis bilanx, quam loco cit. deſcripſi adhibetur, tunc res ex voto cedit, et argenti quantitas aeque ac cupri determinari poteſt, ita vt vaſorum argenteorum monetarum rariorum et antiquitate aeſtimandarum etc. ſi ex argento cupro mixto paratae ſunt, quantitas et valor argenti, absque catino probatorio, et ſine deperditione formae, determinari egregie poſſit.

9. Explicabo itaque, quomodo res aggredienda, vt voti compotes fieri poſſimus et problema in commodum vitae ciuilis et rei literariae cedat.

10. Praeparetur illa bilanx, quae octies maiori ponderi accommodata eſt, vt ad hunc finem idonea reddatur, h. m.

Fig, Aa et Ab. I. In tota bilance nihil mutetur, niſi quod lanx longioris brachii remoueatur. Et talis lanx in eius locum ſubſtituatur, quae filis aurichalceis loco ſericeorum inſtructa ſit et formam retis vel corbis habeat (*a*) excipiendis rebus ponderandis apta.

II.

II. In medio fere filorum metallicorum annexa ſit lanx exigua (*b*) Dependeat rete cum exigua bilance ex brachii longioris loco conſueto , et quidem dependeat rete ſeu corbis longius quam altera lanx brachii breuioris.

III. Huius brachii breuioris filis applicetur etiam exigua lanx in medio filorum *bb*.

IV. Vtrisque *b* et *bb* imponantur patellae valde exiguae duae *pp* eiusdem plane ponderis ſeu grauitatis.

V. Redigatur lanx ex breuiori brachio dependens *q* ad aequilibrium cum corbe longioris brachii (*a*) iuxta datas leges.

VI. Aequilibrata corbis immittatur in vitrum capax aqua repletum , ita vt lanx in medio haerens (*b*) extra aquam maneat et ſolum corbis (*a*) immerſa ſit. Et aequilibrium per aquam ſublatum reſtituatur , eximendo ex lance minoris brachii tantum ponderis quantum ad aequilibrium reſtaurandum requiritur, ſed in trabe plane nihil mutetur. Et ſic quae ad bilancem ſpectant recte erunt adornata.

11. Deinde ratio aquae eſt habenda. Adhibui aquam pluuialem , per chartam bibulam filtratam , quia animaduerti aquam fluuialem eiusdem fluuii diuerſis temporibus diuerſam habere conſiſtentiam, pluuialem ſemper fere eandem. Diu ſatis eandem aquam pluuialem fermentatione ſeu putrefactione purificatam adhibere potui , modo poſt 8. vel 10. dies iterum filtretur aqua, eamque praefero aquae deſtillatione purificatae , quia in deſtillatione

alia vna cum aqua aſcendunt et in vas recipiens decendunt levioresque moleculas terreas ſecum rapiunt. In putrefacta vero aqua ſalia in auras abeunt, quae odorem grauem cauſantur, moleculae vero terreae exutis ſalibus, quibus infixae erant, fundum petunt, et ſic aqua purior redditur quam per deſtillationem.

11. Tandem ſcrinium, in quo aſſeruatur biſanx, ita ſit conſtructum, vt ſuperius cum laterali tegumento amoueri poſſit, inferiore tabulato (*c*) cum fulcimento bilancis (*d*) intacto manente, quo eo liberius cum bilance atque vitro aqua repleto agere poſſit ſcrutator operationem tractans.

13. In tabulato illo inferiori aptetur orbiculus (*e*) in quo ponatur vitrum (*f*), quod ope cochleae eg) et eleuari et demitti poteſt. Vitrum enim ita eſt replendum aqua, vt corbis ex filis orichalceis nonſtructa eundem immerſionis ſitum ſemper retiaeat, et nec profundius neque altius quam in prima vequilibratione in aquam immittatur. Id quod in eqaporata et ex eo imminuta quantitate aquae, vel allua noua adhibita, obtineri hoc modo poteſt. Imminuto enim volumine aquae ſurſum impellatur vitrum, largius affuſa aqua demittatur, vsque dum indiculus ſitum iuſtum fuerit adeptus.

14. Vbi adhuc hoc notandum, quod poſt novam infuſionem aquae, non ſtatim libratio atque demisſio ☽ti in aquam inſtituatur, ſed aqua per horas ſex et vltra quieti permittenda, vt particulae aereae

aereae aquae per infuſionem admixtae atque turgidae exhalent et aqua ſedata reddatur.

15. Deinde quod aere exiſtente calidiore profundius immergatur lanx ideo vitrum ope cochleae eleuandum, frigidiore altius in aqua natet lanx et tunc demittendum eſt vitrum vsque dum inſtet indiculus in vtroque caſu.

16. Iam ad pondera erit reſpiciendum. Optime adhiberi poſſunt pondera Ruthenica, modo vt exactiſſime rectificentur. Nam quae in ſyſtemate vnius pondo Ruthenici continentur partes, quod vulgo venale eſt, multum inaequalitatis habent, ideoque ad exactiſſimam bilancem erunt examinanda et corrigenda.

17. Deinde quia in maiori bilance exactitudo maiusculorum ponderum e. g. 2. vel 4. vnciarum non ſiſtitur, quin minimus aliquis vel exceſſus vel defectus abſorbeatur, quem libra indicare non valeat, vncias plures ſimplices numero 16. in bilance mea probatoria aequiponderaui, eisque loco maiorum ponderum in vno fruſto combinatorum vtor. e. g. ſi 7. vnciae deſiderentur, loco vnius ponderis 7 vncias in vno volumine continentis, 7 vncias ſeparatas coniungo in lance, et ſic exactiſſimum pondus habeo ab omni errore liberatum.

18. Syſtema vero vnius pondo Ruthenici continet partes, quae ſequentem habent valorem: Capſula ſyſtematis in quam reliqua pondera imponuntur ſeu

1ma	pars eſt	16 Loth	=	48 Solot.	=	144 gran	=	288 graen		
2	——	8 L.	=	24 Sol.	=	72 gr.	=	144 graen		
3	——	4 L.	=	12 Sol.	=	36 gr.	=	72 graen		
4	——	2 L.	=	6 Sol.	=	18 gr.	=	36 graen		
5	——	1 L.	=	3 Sol.	=	9 gr.	=	18 graen		
6	——	00	— —	2 Sol.	=	6 gr.	=	12 graen		
7	——	00	— —	$\frac{1}{2}$ Sol.	=	$1\frac{1}{2}$ gr.	=	3 graen		
8	——	00	— —	$\frac{1}{4}$ Sol.	=	$\frac{3}{4}$ gr.	=	$1\frac{1}{2}$ graen	}	= 3 gr
9	——	00	— —	$\frac{1}{8}$ Sol.	=	$\frac{3}{8}$ gr.	=	$\frac{3}{4}$ graen	}	
10	——	00	— —	$\frac{1}{8}$ Sol.	=	$\frac{3}{8}$ gr.	=	$\frac{3}{4}$ graen	}	

In nonnullis ſyſtematibus nouem tantum partes ſeu impoſitiones inueniuntur et tunc 8. et 9. pars pendit:

8	- - 00 - -	$\frac{1}{4}$ Sol.	=	$\frac{3}{4}$ gr.	=	$1\frac{1}{2}$ graen	}	= 3 græn
9	- - 00 - -	$\frac{1}{4}$ Sol.	=	$\frac{3}{4}$ gr.	=	$1\frac{1}{2}$ graen	}	

Ad meum vero vſum accommodaui partes iſtas nouem hac ratione, vt priores ſex maneant antecedentibus vulgaribus aequales, ſed poſteriores tres ſcil. 7. 8. atque 9. ſequentem proportionem habeant atque valorem.

7	- - 00 - -	$\frac{1}{2}$ Sol.	=	$1\frac{1}{2}$ gran	=	3 graen		
8	- - 00 - -	$\frac{1}{3}$ Sol.	=	1 gran	=	2 græn		
9	- - 00 - -	$\frac{1}{6}$ Sol.	=	$\frac{1}{2}$ gran	=	1 græn	=	$\frac{1}{18}$ L.

Vt ita totum ſyſtema conſiſtat ex graenis integris et non fractis.

19. Deinde conficiatur pondus 1. graenum graue, quod eſt $\frac{1}{18}$ pars vnius Loth ſeu 1 graen, et diſpeſcatur illud in partes 18, quarum prima ſit ipſum græn $=\frac{18}{18}$ græn, ſecunda $\frac{17}{18}$, tertia $\frac{16}{18}$, quar-

ta

ta $\frac{15}{18}$ &c. vsque ad pondus vltimum ſeu partem decimam octauam quarum $\frac{18}{18}$ 1 graeno reſpondent.

20. His omnibus accuratiſſime confectis aggredieris inquiſitionem proportionis argenti mixti.

I. Ponderetur maſſa argenti in trutina, ita vt exactiſſime inſtet indiculus. Si in aequilibrio pauculum deſideretur, adiiciatur $\frac{1}{18}$ græn, ſi ab eo excedat aequilibrium, eximatur iterum $\frac{1}{18}$ græn, ante adiectum, et aequilibrium concilietur adiiciendo plumbum diminutum, vsque dum defectus fuerit correctus.

II. Annotetur ſumma ponderum, plumbum vero adiectum imponatur in alterius bilancis, ad hoc opus perficiendum praeparatae brachii longioris et in aqua haerentis lancem exiguam PB, aequilibretur cum lance minoris brachii plumbo tantum iniecto in lancem huius brachii minoris PB, vt lanx aquae immerſa aequilibrium recipiat cum lance minoris brachii in aere haerente.

III. Tandem in lancem aquae immerſam ponatur argentum examinandum, et exploretur eius pondus exactiſſimum, cuius ſumma iterum annotetur.

IV. Tandem calculentur termini inuenti per regulam de tribus hoc modo, vt pondus argenti in trutina examinati locum primum occupet.

Pondus argenti in aqua librati, ſecundo ſtet loco. Tertium terminum abſoluat numerus 288 quod eſt deſideratum ſcil. quantum argenti in 16. Loth = 288. graen contineatur.

5. Quotum quaeratur in ſequenti Tab. I. columna poſteriore graena indicante, et reſponſum dabit prima columna Tab. dictae I. ſcil. quantum ☽ et quantum ♀ in maſſa 16. L. ſeu 1. Marca contineatur. Haec enim tabula, non ſine taedioſo calculo a me conſtructa, huic ſatisfaciet negotio.

41. Inquirendum in $\frac{1}{8}$ Imperialem a Chriſtiano Epiſc. Mogunt. Ao. 1636. cuſum cum ſigno ⅌ quod in monetis ſignificat argentum purum. Totum negotium hac ratione expediui : Hic $\frac{1}{8}$ Imperialis pendebat ex trutina probatoria ordinaria in aere $4\frac{15}{18}$ graen.

Per bilancem octies maius pondus poſtulantem pendebat in aqua $34\frac{17}{18}$ graen.

Ergo ita erat ponendum

$4\frac{15}{18}$ — $34\frac{17}{18}$ — $\frac{288}{181152}$ facit $2082\frac{18}{87}$
87 629

Quia vero reſiduae fractionis nominator 87 in columna fractionum Tab. I. in hac qualitate non inuenitur, ita erit faciendum :

Ponatur in R. aurea

	Fractionis nominator	87 primo loco
87—18—18	Fractionis numerator	18 ſecundo loco
facit $3\frac{63}{87}$	Fractionis vſualis et	
i. e. fere $3\frac{3}{4}$	perpetuae in columna	
	Tabulae Nominator	18 tertio loco

Ergo loco $\frac{18}{78}$ ſubſtituatur $\frac{3\frac{3}{4}}{18}$

Hac ratione numerus emergens erit $2082\ \frac{3\frac{3}{4}}{18}$ qui in tabula I quaerendus, et indicat ibi

15 L.

15. L. $\frac{3}{18}$ graen. $(+\frac{\frac{3}{4}}{18})$ graen. ☽

$\frac{14}{18}$ graen. $(+\frac{\frac{1}{4}}{18})$ graen. ♀

Quae quantitas continebatur in 1. Marca ☽ti ♀ro ligati ex qua cuſa eſt moneta data.

22. Fundamenta, quae iam Dn. Wolff et alii dederunt, non tangam, tantum hic quae ad meum ſpectant inuentum, et quibus totum negotium practicum ſuperſtructum eſt, explicabo. Notauit ex Senguerdo (quem ad manum non habeo) Leupold in theatro Hydroſtat. pag. 228 *

argentum purum 554 grana graue
amittere in aqua libratum 53 gran
et cuprum purum 554 graue
amittere in aqua libratum 64 gran.

23. At vero, quia tam inſenſibilis differentia in minori quantitate maſſae ex ☽ et ♀ mixtae per bilancem non diſcernitur, ſi vtriusque metalli mixti

 partes

* Notandum hic in Leupoldi recenſione errorem eſſe commiſſum, dicit enim: Wenn jedes Stück Metall, in der Lufft gewogen, 554. gr. hat es im Waſſer gehalten ☽ 53 gr. ♀ 64. gr. quod idem eſt ☽ in aere pendens 554 pendit in ▽ 53 gr.
♀ in aere pendens 554 pendit in ▽ 64. gr.
quod tamen falſum, dicendum fuiſſet: Metalla 554 gr. amiſiſſe in ▽ ☽ 53 gr. ♀ 64 gr. ita vt volumen
☽ in aere 554 gr. pendens, pendat in ▽ 501 gran.
et ſic amittit 53 gr.
♀ in aere 554 gr. pendens, pendat in ▽ 490 gr.
et ſic amittit 64. gr.
Id quod non ſatis circumſpectum lectorem ſeducere omnino poteſt.

partes exigua quantitate in diuerſis compoſitionibus adhibuerunt operatores, impoſſibile fuit hactenus problema hoc practice exequi et in vſum conuertere.

23. E. gr. In 1. Marca = 16. L. metalli mixti argentum eſt 15 L. —— et Cuprum 1 L. In 1 Mr. = 16 L. metalli mixti argentum eſt $15\frac{1}{4}$ L. et Cuprum $\frac{3}{4}$ Loth, ex his diuerſis metallis cuſi ſunt duo nummi argentei, quorum quiuis 1 L. grauis deprehenditur. Inter vtrosque nummos nulla plane differentia etiam in optimae notae bilancibus percipitur, maxime quia aqua difficiliorem bilanci concedit motum, et quum nullum datum apparet, problema his metallis practice applicatum inanimatum eſt, et nullum vſum habet.

At iuxta bilancem octies maius requirentem pondus, in his nummis differentia eſt perceptibilis, et per pondus exprimitur ſenſibiliter, hinc problema reuiuiſcit, et vſui accommodari poteſt.

24. Nouum hoc eſſe inuentum nemo negare poterit, quia bilanx talis a nemine hactenus fuit adornata, ſed a me primum hic Petropoli inuenta.

25. Vſum non eſſe contemnendum in re litteraria, quia valor antiquarum monetarum, ſi ☽ eorum ♀ fuerit ligatum, absque deſtructione formae per hoc inuentum inueſtigari poteſt. In ciuili vita argentum egregie poteſt examinari cuius tenoris id ſit.

26. Nunc omnino data Senguerti, ex recenſione Leupoldi, experimentis accuratioribus erunt examinanda, et primo quidem videndum, vtrum con-

concordet eius aſſertum cum experimentis, quando ſtatuit quod 554 grana ☽ amittant in aqua 53 gran. Dubitari enim poſſet, an iuſtam bilancem habuerit, quae certe rariſſima, et deinde vtrum ☽ puriſſimum, ab omni additamento ♀ liberatum, adhibuerit. Vtrumque igitur ad examen erit reuocandum.

27. Equidem mihi notum eſt, quanta differentia ſit inter ☽ quod ex caſis argenti purificationi deſtinatis, prodit, vbi in vna Marca ☽ certas ob cauſas vna drachma ♀ relinquitur; et ſi per capellam ſtudio totum abigitur ♀, et ita purificatur ☽, vt purum iudicetur, tamen nequaquam purum id eſſe probari poteſt, ſiquidem et ♄ in hac operatione adhibitus ☽ halitum communicat ♀reum, ☽ vero, quod arte chymica profundiori plane purum et ab omni inquinamento ♀eo purificatum producitur, talem halitum non habet.

28. Quod ☽ per cupellam ſeu catinum probatorum aut cineritium non omnimodam nanciſcatur puritatem, hoc modo experimur. Si ☽ lamellatum 🜂 calcinatur, et ſuperaffunditur Ω vrinae aut ✳ci, tunc colore ceruleo aliquantulum adhuc tingitur ſpiritus, manifeſto indicio, cupreum halitum inquinaſſe ☽, et ♄ hunc ipſi communicaſſe, quia id ♀reum vt plurimum reperitur, vnde color liquoris.

29. Vt vero ☽ puriſſimum, ſpiritum vrinae nequaquam tingentem, acquirerem, hoc modo egi: ☽ exacte cupellatum ⦶ quater fudi, et ſcoreae poſt primam fuſionem producebantur ceruleae, poſt ſecundam, pallidae, poſt tertiam et quartam, cryſtal-

 linae

linae, et nullo colore tinctae, hoc indicio erat, nullum plane ♀ ineſſe ☽. Et illud ☽ calcinatum 🜍re, ſpiritum vrinae purum reddidit affuſum, et nullo colore inquinatum. Hoc demum ☽ purum eſt dicendum, quod pauciſſimis, etiam argentariis, videre contigit.

30. Hoc ☽ ponderaui in aere, et quidem in minima quantitate, quia bilanx probatoria pondus maiusculum ferre incapax eſt, ſed eo ipſo exactius cuncta percipere potui.

31. Subſtitui enim pro Senguerti 554 granis ☽ $\frac{554}{18}$ graen et ſic pro 1. grano $\frac{1}{36}$ partem vnius grani, (2. graen conſtituunt 1 granum) et quia bilanx adhibita in octupla proportione grauitatem metitur, indicabat ea h. l. $\frac{1}{288}$ partem vnius grani.

32. Has partes ſeu $\frac{554}{18}$ graena diuiſi per 2, prodibant $\frac{277}{18}$ graena, easque tanquam fundamentum aſſumſi, quia bilanx probatoria eas ſine damno ferre poterat, itaque bilanci octuplum augenti ſubieci, et inueni per librationem in aqua $111\frac{6\frac{1}{2}}{18}$ graena, quae per 18 multiplicata dabant $\frac{2004\frac{1}{2}}{18}$ graenorum, tantum ſcil. pendebant $\frac{277}{18}$ graena.

33. Quia vero de $\frac{554}{18}$ graenis quaeſtio eſt, ideo emergentia $\frac{2004\frac{1}{2}}{18}$ erant duplicanda, et ſic proueniebant $\frac{4009}{18}$ graena. Ergo $\frac{554}{18}$ dant $\frac{4009}{18}$ graena

His

His per 8. diuiſis prodeunt $\frac{501\frac{1}{8}}{18}$ graen.
quae $\frac{554}{18}$ graena in aqua pendunt.

34. Vnde per ſubtractionem huius dati atque inuenti patet, quod 554 grana amittant in aqua $52\frac{7}{8}$ gran = 52 gran $\frac{15\frac{3}{4}}{18}$ graen, mutato enim nomine graenorum, reſtituitur nomen granorum.

35. Tantum ſcil. amittebant 554 gran ☽ in aqua libratae nempe 52 gran $\frac{15\frac{3}{4}}{18}$ graen. et quidem argenti finisſimi , quod dicitur, ſeu puriſſimi arte chymica redditi.

36. Deinde ☽ tantum exacte cupellatum, et non ⌽ purificatum, quod ideo ſpiritum vrinae pallide ceruleo adhuc tingebat colore, eodem modo libraui et inueni quod 554 grana amittant in aqua 52 gran $\frac{16}{18}$ graen part. et aliquantulum minus, et ita non $\frac{16}{18}$ graena plena.

37. Ex quo iudicaui fuiſſe Senguerti ☽ vel non ſatis purum , vel eius bilancem non adeo exactam, vel ad hoc opus indagandum inſufficientem ; vel haec tria concurriſſe et differentiam peperiſſe, quae exigua quidem videtur , ſed in maiori volumine ☽ maximopere aucta deprehenditur , quandoquidem ille aſſerit 554. grana amittere 53. grana per librationem in aqua , id quod neque in ☽ puriſſimo, neque in ☽ cupellato deprehendi , ſed imminutionem ponderis in aqua inueni :

in

in ☽ puriſſimo 554 gr. amittunt 52 gran $\frac{15\frac{3}{4}}{18}$ graen,
in ☽ capellato 554 gr. amittunt 52 gran $\frac{16}{18}$ graen.

38. Suſpicandum igitur Senguerti bilancem, propter magnitudinem ponderis librandi fuiſſe maiusculam, ideoque inſufficientem minutias indicandi, quia bilanx probatoria ordinaria pondus 554 granorum ferre non poteſt ſed tantum 1 Drachm. Ruthenicum = 3. gran = 6 graen ferendis eſt apta. Seu iuxta pondera in Germania recepta 1. Drachm. ſeu Quentl. = $2\frac{1}{4}$ gran = $4\frac{1}{2}$ graen.

39. Deinde ♀ varias ſpecies vel potius ♀ variorum natalium examinaui. Cupri cuiuscunque differentiam in aqua ponderati dedit Senguertus quod ſcil. 554 grana amittant in aqua 64. grana, ſed inueni differentiam ſequentium ſpecierum talem:

554 partes ♀ lapponici ammittunt in aqua $62\frac{3}{4}$ part.
Succici, Hungarici — — $63\frac{1}{4}$ part.
Anglicani — — $63\frac{3}{4}$ part.

40. Ex diuerſis itaque his ponderibus ♀pri patet quod illud vulgariter non haberi poſſit purum, Notum enim eſt in ♀ro deliteſcere et particulas ☉res et ☽res vt et ♂les. Cogitaui itaque de purgando ♀ro ab omnibus his particulis alienis, quarum priores ſcil. ☉res et ☽res tanquam minutiae et impenſis impares negliguntur in coctione atque praeparatione ordinaria ♀ri, poſteriores ſcil. ♂les etiam relinquuntur intactae, ne de ſubſtantia ♀ri aliquid deperdatur, hac vero omnes in communi vſu cupro nihil officiunt.

41

41. Quandoquidem vero monetarii et fabri argentarii in ſuis operationibus commune ♀ addere ſoleant ☽, quam miſtionem ligaturam ſeu legaturam appellant, itaque neceſſe erat vt et de tali ♀ calculum meum inſtituerem, ideo grauitatem ♀ Suecici, cum Hungarico concordantem, adhibui, et de ♀ puriſſimo non aeque fui ſolicitus hic loci, quam de ☽ exactiſſime purgando a particulis ♀reis, quanquam et in ☽ a particulis ☉ribus ſeparandis etiam abſtinerem, ne praxis laederetur nimia accuratione.

42. Sed quando librationem in aqua ☉ applicabo, quod, Deo volente, mihi propoſui, tunc et ☽ a part. ☉. Et ♀ a part. ☉☽ et ♂. Et ☉ purificationem excellentiorem, quam quae fuſione per ♀ peragitur, dabo, et modum explicabo, ex quo horum metallorum grauitas ſpecifica determinari poterit.

43. Vt vero comprobatum darem vèrum calculum et ☽ puriſſ. et ♀ vulgaris Suecici in Tab. I. propoſitum, et iuxta mea inuenta, non vero Senguerti data, exaratum, eumque re ipſa demonſtrarem cum praxi concordantem, hoc modo egi.

44. Sumſi ☽ 6 graen: $\frac{1}{2}$ Marc = 8 L.
♀ 6 graen: $\frac{1}{2}$ Marc = 8 L.

Singulis ſeorſim in aere libratis, haec fruſta ☽ et ♀ coniunctim immiſi in aquam, pendebant $85\frac{17}{18}$ graen. Calculo iuxta §. 20. rite ducto, quaeſiui numerum emergentem qui erat $2062\frac{8\frac{2}{3}}{18}$ in Tabula mea I. quae indicabat, in 1 Marca ☽ hoc modo ligati ineſſe

☽ 7 Loth 17 græn— ♀ 8 L. 1 graen *
Iuxta Senguert. ☽ 8 L. 12 graen— ♀ 7 L. 6 graen *
Totum calculum hic apponere placet quoad ordinationem terminorum.

☽ et ♀
12 graen —— $85\frac{17}{18}$ —— 288. facit $2062\frac{13}{27}$
216 —— 1547 —— 445536
27 —— 13 —— 18 facit $\frac{8\frac{2}{3}}{18}$

Ergo 12 graen pendentes in aqua $85\frac{17}{18}$ dant $2062\frac{8\frac{2}{3}}{18}$ graen.

Deinde hoc tentaui cum
☽ 12 graen: $\frac{3}{4}$ Marc = 12 L. } pendunt in aqua
♀ 4 graen: $\frac{1}{4}$ Marc = 4 L. } $115\frac{4\frac{2}{3}}{18}$ graen.
Numerus emergens $2074\frac{12}{18}$ dat 12 L. – – ☽ 4 L. ♀
iuxta Senguert. 12 L. 16 graen ☽ 3 L. 2 graen ♀

Porro ☽ 6 graen: $\frac{3}{4}$ Marc = 12 L. } pendunt in aqua
♀ 2 graen: $\frac{1}{4}$ Marc = 4 L. } $57\frac{11\frac{1}{3}}{18}$ graen
Numerus emergens $2074\frac{12}{18}$ dat 12 L. ☽ 4 L. ♀
iuxtaSenguert 12 L. 16 graen ☽ 3 L. 2 graen ♀

Tandem ☽ 2 graen: $\frac{1}{4}$ Marc = 4 L. } pendunt in aqua
♀ 6 graen : $\frac{3}{4}$ Marc = 12 L. } $56\frac{17\frac{3}{4}}{18}$ graen
Numerus emergens $2051\frac{9}{18}$ dat 4 L. ☽ – – – 12 L ♀
iuxta Sengu. 4 L. 14 graen ☽ – – – 11 L. 4 ♀

45. Haec praxis docebat quod mea tabula ſit exacta, et tuto adhibenda in praxi, cum tabula iuxta data Senguerti adornata, erroneam indicationem producat ideoque eam hic apponere nolui.

46. Exigua illa differentia, quam nonnunquam in numero emergente cum Tabula non exacte conveniente (e. gr. in experimento primo praeanteced. §. 44.) obſeruare licet , aut defectui minimorum ponderum adſcribendum , quartas enim tantum partes de $\frac{1}{18}$ graen dignoſcere poſſum, ita vt $\frac{1}{72}$ pars vnius graen perceptibilis ſit per aquam, minores ea non prodit vid. ad finem §. 6. aut impuritati metallorum debetur, quandoquidem nec ♀ a particulis ○ ☽ et ♂ repurgatum neque ab ☽ ſeparatae erant partic. ⊙ in illis metallis forte adhuc deliteſcentes vid. §. 41. ſ.

Nummi antiqui e Muſeo Imperatorio ſub examen vocati :

1 Nummus Graecus· quem Ampliſſ. Dn. Prof. Bayer Coll. honoratiſſ. peculiari diſſertatione illuſtravit :

Caput Iouis ΑΙΓΙΕΩΝ = Monogramma Achaiae disiectis circa monogramma literis ΑΡΙ . . ΤΟΔ . . ΜΟC (Αριϛόδαμος, Aegienſium magiſtratus , vt Collega noſter explicat) pendit in aere $2\frac{16}{18}$ graen. In aqua $20\frac{12}{18}$ emergit numerus 2060 $5\frac{\frac{1}{2}}{18}$ facit ☽ 7 L. $2\frac{1}{2}$ graen. ♀ 8 L. $15\frac{1}{2}$ graen.

2. Nummus Romanus: Caput Aemilii Lepidi : LE-

 PI-

PIDVS PON. MAX. III. V.R.P.C. = Caput Octaviani Caeſaris. CAESAR — — — VIR. R. P. C.

in aere $5\frac{2}{18}$ graen. In aqua $36\frac{16}{18}$ Numerus 2078.

dat ☽ 13 L. 2 graen
♀ 2 L. 16 graen

3 Denarius Romanus : Caput Romae M. CIPI. MF = Bigae et triremis ROMA.

in aere $4\frac{13}{18}$ graen. In aqua $34\frac{3}{18}$ Numerus 2073.

dat ☽ 11 L. $13\frac{3}{4}$ graen.
♀ 4 L. $4\frac{1}{4}$ graen.

4. Caput Herculis cum claua = Duo equites et mus TI . . .

in aere $4\frac{13}{18}$ graen. In aqua $34\frac{2}{18}$. Numerus $2073\frac{13}{18}$

dat ☽ 11 L. 14 graen
♀ 4 L. 4 graen

5 Caput Ptolomaei Regis = Aquila et nomen pene obliteratum . . ΤΟΛΕΜΑ . . Ο

Moneta haec Aegyptiaca examini bilancis non reſpondet , prodit enim numerus maior quam argento puriſſimo conuenit , ideoque ſuſpicor quod multum ☉ei inſit, cuius etiam veſtigia in lapide Lydio, poſt aquae fortis adhibitionem, oculo armato obſeruantur.

6 Denarius Romanus : Caput Romae = Augur et altera perſona ad columnam ſtantes, ſuper columna ROMA ad vtriusque perſonae latera . . ANAVL et . . . GVRINI. Nummus ſimilis fere illi quem Laur. Begerus produxit e muſeo Regis Pruſſiae Theſauri Brandeburgici Tom. II. p. 565.

Haec

Haec moneta falſata eſt ad vexandos atque confundendos antiquarios, ſunt enim duae monetae diuerſae, ita combinatae, vt vnciam conſtituant, ſed margo dolum prodit.

Vnum latus cum capite Romae praeſtantius argentum habet altero cum viris et columna. Hic numerus propter metallum ad combinationem adhibitum ineptus eſt ad examen per aquam.

7 Ad manus ſunt plures nummi Arabici, admodum albi et gliſcentes, ac ſi ☿rio fricati eſſent, incuruaturae impatientes et fragiles, malleati adhuc fragiliores redduntur, lapidi Lydio adfricti, adfrictum omne conſumebat aqua fortis, ideoque ☉ expertes. Hi examen bilancis reſpuunt, emergit enim numerus maior quam argenti puriſſimi, ideoque ex miſtione plurium metallorum eos conſtare autumo. Pendit nummus in aere $1\frac{14}{18}$ graen in aqua $12\frac{17}{18}$ graen numerum dat calculus 2097 cum tamen ☽ puriſſ. $2084\frac{9}{18}$ tantum pendat, quemadmodum ex tabula cognoſcitur.

Tale quid etiam expertus ſum in variis vaſis, armillis idolis etc. in Tattaricis regionibus e ſepulchris erutis, ad nos translatis et in gazophylacio curioſo Imperatorio hic Petropoli aſſeruatis.

TAB. I. *De argento cupro mixto.*

☽ 16 L. - - - 2084 $\frac{9}{18}$

☽ 15 L.	17 graen	2084 $\frac{6}{18}$		☽ 14 L.	17 gr.	2081 $\frac{12}{18}$
♀ — —	1 graen			♀ 1 L.	1 gr.	
☽ 15 L.	16 gr.	2084 $\frac{3}{18}$		☽ 14 L.	16 gr.	2081 $\frac{11}{18}$
♀ — —	2 gr.			♀ 1 L.	2 gr.	
☽ 15 L.	15 gr.	2084 —		☽ 14 L.	15 gr.	2081 $\frac{9}{18}$
♀ —	3 gr.			♀ 1 L.	3 gr.	
☽ 15 L.	14 gr.	2083 $\frac{15}{18}$		☽ 14 L.	14 gr.	2081 $\frac{7}{18}$
♀ —	4 gr.			♀ 1 L.	4 gr.	
☽ 15 L.	13 gr.	2083 $\frac{12}{18}$		☽ 14 L.	13 gr.	2081 $\frac{6}{18}$
♀ —	5 gr.			♀ 1 L.	5 gr.	
☽ 15 L.	12 gr.	2083 $\frac{9}{18}$		☽ 14 L.	12 gr.	2081 $\frac{4}{18}$
♀ —	6 gr.			♀ 1 L.	6 gr.	
☽ 15 L.	11 gr.	3083 $\frac{6}{18}$		☽ 14 L.	11 gr.	2081 $\frac{2}{18}$
♀ —	7 gr.			♀ 1 L.	7 gr.	
☽ 15 L.	10 gr.	2083 $\frac{3}{18}$		☽ 14 L.	10 gr.	2081
♀ —	8 gr.			♀ 1 L.	8 gr.	
☽ 15 L.	9 gr.	2083 —		☽ 14 L.	9 gr.	2080 $\frac{17}{18}$
♀ —	9 gr.			♀ 1 L.	9 gr.	
☽ 15 L.	8 gr.	2082 $\frac{16}{18}$		☽ 14 L.	8 gr.	2080 $\frac{15}{18}$
♀ —	10 gr.			♀ 1 L.	10 gr.	
☽ 15 L.	7 gr.	2082 $\frac{13}{18}$		☽ 14 L.	7 gr.	3080 $\frac{14}{18}$
♀ —	11 gr.			♀ 1 L.	11 gr.	
☽ 15 L.	6 gr.	2082 $\frac{10}{18}$		☽ 14 L.	6 gr.	2080 $\frac{12}{18}$
♀ —	12 gr.			♀ 1 L.	12 gr.	
☽ 15 L.	5 gr.	2082 $\frac{8}{18}$		☽ 14 L.	5 gr.	2080 $\frac{10}{18}$
♀ —	13 gr.			♀ 1 L.	13 gr.	
☽ 15 L	4 gr.	2082 $\frac{5}{18}$		☽ 14 L.	4 gr.	3080 $\frac{9}{18}$
♀ —	4 gr			♀ 1 L.	14 gr.	
☽ 15 L	3 gr.	2082 $\frac{2}{18}$		☽ 14 L.	3 gr.	2080 $\frac{7}{18}$
♀ —	15 gr.			♀ 1 L.	15 gr.	
☽ 15 L.	2 gr.	2082 —		☽ 14 L.	2 gr.	2080 $\frac{6}{18}$
♀ —	16 gr.			♀ 1 L.	16 gr.	
☽ 15 L.	1 gr.	2081 $\frac{16}{18}$		☽ 14 L.	1 gr.	2080 $\frac{4}{18}$
♀ —	17 gr.			♀ 1 L.	17 gr.	
☽ 15 L.	— —	2081 $\frac{14}{18}$		☽ 14 L.	— —	2080 $\frac{3}{18}$
♀ 1 L.	— —			♀ 2 L.	— —	

☽	13 L.	17 graen	2080
♀	2 L.	1 graen	
☽	13 L.	16 gr.	$2079\frac{16}{18}$
♀	2 L.	2 gr.	
☽	13 L.	15 gr.	$2079\frac{13}{18}$
♀	2 L.	3 gr.	
☽	13 L	14 gr.	$2079\frac{11}{18}$
♀	2 L	4 gr.	
☽	13 L.	13 gr.	$2079\frac{8}{18}$
♀	2 L.	5 gr.	
☽	13 L.	12 gr.	$2079\frac{5}{18}$
♀	2 L.	6 gr.	
☽	13 L.	11 gr.	$2079\frac{3}{18}$
♀	2 L.	7 gr.	
☽	13 L.	10 gr.	2079 —
♀	2 L.	8 gr.	
☽	13 L.	9 gr.	$2078\frac{16}{18}$
♀	2 L.	9 gr.	
☽	13 L.	8 gr.	$2078\frac{14}{18}$
♀	2 L.	10 gr.	
☽	13 L.	7 gr.	$2078\frac{12}{18}$
♀	2 L.	11 gr.	
☽	13 L.	6 gr.	$2078\frac{10}{18}$
♀	2 L.	12 gr.	
☽	13 L.	5 gr.	$2078\frac{8}{18}$
♀	2 L.	13 gr.	
☽	13 L.	4 gr.	$2078\frac{4}{18}$
♀	2 L.	14 gr.	
☽	13 L.	3 gr.	$2078\frac{2}{18}$
♀	2 L.	15 gr.	
☽	13 L.	2 gr.	2078
♀	2 L.	16 gr.	
☽	13 L.	1 gr.	$2077\frac{16}{18}$
♀	2 L.	17 gr.	
☽	13 L.	— —	$2077\frac{14}{18}$
♀	3 L.	- —	

☽	12 L.	17 graen	$2077\frac{11}{18}$
♀	3 L.	1 graen	
☽	12 L.	16 gr.	$2077\frac{8}{18}$
♀	3 L.	2 gr.	
☽	12 L.	15 gr.	$2077\frac{5}{18}$
♀	3 L.	3 gr.	
☽	12 L.	14 gr.	$2077\frac{2}{18}$
♀	3 L.	4 gr.	
☽	12 L.	13 gr.	$2076\frac{17}{18}$
♀	3 L.	5 gr.	
☽	12 L.	12 gr.	$2076\frac{13}{18}$
♀	3 L.	6 gr.	
☽	12 L.	11 gr.	$2076\frac{10}{18}$
♀	3 L.	7 gr.	
☽	12 L.	10 gr.	$2076\frac{7}{18}$
♀	3 L.	8 gr.	
☽	12 L.	9 gr.	$2076\frac{4}{18}$
♀	3 L.	9 gr.	
☽	12 L.	8 gr.	$2076\frac{1}{18}$
♀	3 L.	10 gr.	
☽	12 L.	7 gr.	$2075\frac{16}{18}$
♀	3 L.	11 gr.	
☽	12 L.	6 gr.	$2075\frac{13}{18}$
♀	3 L.	12 gr.	
☽	12 L.	5 gr.	$2075\frac{9}{18}$
♀	3 L.	13 gr.	
☽	12 L.	4 gr.	$2075\frac{6}{18}$
♀	3 L.	14 gr.	
☽	12 L.	3 gr.	$2075\frac{3}{18}$
♀	3 L.	15 gr.	
☽	12 L.	2 gr.	2075
♀	3 L.	16 gr.	
☽	12 L.	1 gr.	$2074\frac{15}{18}$
♀	3 L.	17 gr.	
☽	12 L.	— —	$2074\frac{12}{18}$
♀	4 L.	— —	

☽	11 L.	17 graen	$2074\frac{8}{18}$	☽	10 L.	17 graen	$2070\frac{13}{18}$
♀	4 L.	1 graen		♀	5 L.	1 graen	
☽	11 L.	16 gr.	$2074\frac{4}{18}$	☽	10 L.	16 gr.	$2070\frac{11}{18}$
♀	4 L.	2 gr.		♀	5 L.	2 gr.	
☽	11 L.	15 gr.	2074	☽	10 L.	15 gr.	$2070\frac{9}{18}$
♀	4 L.	3 gr.		♀	5 L.	3 gr.	
☽	11 L.	14 gr.	$2073\frac{14}{18}$	☽	10 L.	14 gr.	$2070\frac{6}{18}$
♀	4 L.	4 gr.		♀	5 L.	4 gr.	
☽	11 L.	13 gr.	$2073\frac{10}{18}$	☽	10 L.	13 gr.	$2070\frac{4}{18}$
♀	4 L.	5 gr.		♀	5 L.	5 gr.	
☽	11 L.	12 gr.	$2073\frac{6}{18}$	☽	10 L.	12 gr.	$2070\frac{2}{18}$
♀	4 L.	6 gr.		♀	5 L.	6 gr.	
☽	11 L.	11 gr.	$2073\frac{2}{18}$	☽	10 L.	11 gr.	2070
♀	4 L.	7 gr.		♀	5 L.	7 gr.	
☽	11 L.	10 gr.	$2072\frac{17}{18}$	☽	10 L.	10 gr.	$2069\frac{15}{18}$
♀	4 L.	8 gr.		♀	5 L.	8 gr.	
☽	11 L.	9 gr.	$2072\frac{13}{18}$	☽	10 L.	9 gr.	$2069\frac{13}{18}$
♀	4 L.	9 gr.		♀	5 L.	9 gr.	
☽	11 L.	8 gr.	$2072\frac{9}{18}$	☽	10 L.	8 gr.	$2069\frac{10}{18}$
♀	4 L.	10 gr.		♀	5 L.	10 gr.	
☽	11 L.	7 gr.	$2072\frac{5}{18}$	☽	10 L.	7 gr.	$2069\frac{8}{18}$
♀	4 L.	11 gr.		♀	5 L.	11 gr.	
☽	11 L.	6 gr.	$2071\frac{1}{18}$	☽	10 L.	6 gr.	$2069\frac{6}{18}$
♀	4 L.	12 gr.		♀	5 L.	12 gr.	
☽	11 L.	5 gr.	$2071\frac{15}{18}$	☽	10 L.	5 gr.	$2069\frac{4}{18}$
♀	4 L.	13 gr.		♀	5 L.	13 gr.	
☽	11 L.	4 gr.	$2071\frac{11}{18}$	☽	10 L.	4 gr.	$2069\frac{2}{18}$
♀	4 L.	14 gr.		♀	5 L.	14 gr.	
☽	11 L.	3 gr.	$2071\frac{7}{18}$	☽	10 L.	3 gr.	$2068\frac{17}{18}$
♀	4 L.	15 gr.		♀	5 L.	15 gr.	
☽	11 L.	2 gr.	$2071\frac{3}{18}$	☽	10 L.	2 gr.	$2068\frac{15}{18}$
♀	4 L.	16 gr.		♀	5 L.	16 gr.	
☽	11 L.	1 gr.	2071	☽	10 L.	1 gr.	$2068\frac{12}{18}$
♀	4 L.	17 gr.		♀	5 L.	17 gr.	
☽	11 L.	— —	$2070\frac{16}{18}$	☽	10 L.	— —	$2068\frac{10}{18}$
♀	5 L.	— —		♀	6 L.	— —	

☽	9L.	17 graen	$2068\frac{7}{18}$	☽	8L.	17 graen	$2065\frac{10}{18}$
♀	6L.	1 graen		♀	7L.	1 graen	
☽	9L.	16 gr.	$2068\frac{4}{18}$	☽	8L.	16 gr.	$2065\frac{7}{18}$
♀	6L.	2 gr.		♀	7L.	2 gr.	
☽	9L.	15 gr.	$2068\frac{1}{18}$	☽	8L.	15 gr.	$2065\frac{4}{18}$
♀	6L.	3 gr.		♀	7L.	3 gr.	
☽	9L.	14 gr.	$2067\frac{6}{8}$	☽	8L.	14 gr.	$2065\frac{1}{18}$
♀	6L.	4 gr.		♀	7L.	4 gr.	
☽	9L.	13 gr.	$2067\frac{13}{18}$	☽	8L.	13 gr.	$2064\frac{16}{18}$
♀	6L.	5 gr.		♀	7L.	5 gr.	
☽	9L.	12 gr.	$2067\frac{10}{18}$	☽	8L.	12 gr.	$2064\frac{13}{18}$
♀	6L.	6 gr.		♀	7L.	6 gr.	
☽	9L.	11 gr.	$2067\frac{8}{18}$	☽	8L.	11 gr.	$2064\frac{10}{18}$
♀	6L.	7 gr.		♀	7L.	7 gr.	
☽	9L.	10 gr.	$2067\frac{5}{18}$	☽	8L.	10 gr.	$2064\frac{7}{18}$
♀	6L.	8 gr.		♀	7L.	8 gr.	
☽	9L.	9 gr.	$2067\frac{2}{18}$	☽	8L.	9 gr.	$2064\frac{4}{18}$
♀	6L.	9 gr.		♁	7L.	9 gr.	
☽	9L.	8 gr.	$2066\frac{17}{18}$	☽	8L.	8 gr.	$2064\frac{1}{18}$
♀	6L.	10 gr.		♀	7L.	10 gr.	
☽	9L.	7 gr.	$2066\frac{14}{18}$	☽	8L.	7 gr.	$2063\frac{16}{18}$
♀	6L.	11 gr.		♀	7L.	11 gr.	
☽	9L.	6 gr.	$2066\frac{11}{18}$	☽	8L.	6 gr.	$2063\frac{13}{18}$
♀	6L.	12 gr.		♀	7L.	12 gr.	
☽	9L.	5 gr.	$2066\frac{8}{18}$	☽	8L.	5 gr.	$2063\frac{10}{18}$
♀	6L.	13 gr.		♀	7L.	13 gr.	
☽	9L.	4 gr.	$2066\frac{5}{18}$	☽	8L.	4 gr.	$2063\frac{7}{18}$
♀	6L.	14 gr.		♀	7L.	14 gr.	
☽	9L.	3 gr.	$2066\frac{3}{18}$	☽	8L.	3 gr.	$2063\frac{4}{18}$
♀	6L.	15 gr.		♀	7L.	15 gr.	
☽	9L.	2 gr.	2066	☽	8L.	2 gr.	$2063\frac{1}{18}$
♀	6L.	16 gr.		♀	7L.	16 gr.	
☽	9L.	1 gr.	$2065\frac{15}{18}$	☽	8L.	1 gr.	$2062\frac{16}{18}$
♀	6L.	17 gr.		♀	7L.	17 gr.	
☽	9L.	— —	$2065\frac{13}{18}$	☽	8L.	— —	$2062\frac{13\frac{1}{2}}{18}$
♀	7L.	— —		♀	8L.	— —	

☽	7 L.	17 graen	$2062\frac{11}{18}$	☽	6 L.	17 graen	$2059\frac{16}{18}$
♀	8 L.	1 graen		♀	9 L.	1 graen	
☽	7 L.	16 gr.	$2062\frac{8}{18}$	☽	6 L.	16 gr.	$2059\frac{13}{18}$
♀	8 L.	2 gr.		♀	9 L.	2 gr.	
☽	7 L.	15 gr.	$2062\frac{5}{18}$	☽	6 L.	15 gr.	$2059\frac{9}{18}$
♀	8 L.	3 gr.		♀	9 L.	3 gr.	
☽	7 L.	14 gr.	$2062\frac{2}{18}$	☽	6 L.	14 gr.	$2059\frac{6}{18}$
♀	8 L.	4 gr.		♀	9 L.	4 gr.	
☽	7 L.	13 gr.	$2061\frac{17}{18}$	☽	6 L.	13 gr.	$2059\frac{3}{18}$
♀	8 L.	5 gr.		♀	9 L.	5 gr.	
☽	7 L.	12 gr.	$2061\frac{14}{18}$	☽	6 L.	12 gr.	2059
♀	8 L.	6 gr.		♀	9 L.	6 gr.	
☽	7 L.	11 gr.	$2061\frac{11}{18}$	☽	6 L.	11 gr.	$2058\frac{16}{18}$
♀	8 L.	7 gr.		♀	9 L.	7 gr.	
☽	7 L.	10 gr.	$2061\frac{8}{18}$	☽	6 L.	10 gr.	$2058\frac{13}{18}$
♀	8 L.	8 gr.		♀	9 L.	8 gr.	
☽	7 L.	9 gr.	$2061\frac{5}{18}$	☽	6 L.	9 gr.	$2058\frac{10}{18}$
♀	8 L.	9 gr.		♀	9 L.	9 gr.	
☽	7 L.	8 gr.	$2061\frac{2}{18}$	☽	6 L.	8 gr.	$2058\frac{8}{18}$
♀	8 L.	10 gr.		♀	9 L.	10 gr.	
☽	7 L.	7 gr.	2060	☽	6 L.	7 gr.	$2058\frac{5}{18}$
♀	8 L.	11 gr.		♀	9 L.	11 gr.	
☽	7 L.	6 gr.	$2060\frac{15}{18}$	☽	6 L.	6 gr.	$2058\frac{3}{18}$
♀	8 L.	12 gr.		♀	9 L.	12 gr.	
☽	7 L.	5 gr.	$2060\frac{12}{18}$	☽	6 L.	5 gr.	2058
♀	8 L.	13 gr.		♀	9 L.	13 gr.	
☽	7 L.	4 gr.	$2060\frac{10}{18}$	☽	6 L.	4 gr.	$2057\frac{16}{18}$
♀	8 L.	14 gr.		♀	9 L.	14 gr.	
☽	7 L.	3 gr.	$2060\frac{7}{18}$	☽	6 L.	3 gr.	$2057\frac{13}{18}$
♀	8 L.	15 gr.		♀	9 L.	15 gr.	
☽	7 L.	2 gr.	$2060\frac{4}{18}$	☽	6 L.	2 gr.	$2057\frac{10}{18}$
♀	8 L.	16 gr.		♀	9 L.	16 gr.	
☽	7 L.	1 gr.	$2060\frac{2}{18}$	☽	6 L.	1 gr.	$2057\frac{8}{18}$
♀	8 L.	17 gr.		♀	9 L.	17 gr.	
☽	7 L.	— —	$2060\frac{1\text{-}2\text{-}}{18}$	☽	6 L.	— —	2057
♀	9 L.	— —		♀	9 L.	— —	

☽ 5 L.

☽	5 L.	17 graen	$2057\frac{3}{18}$	☽	4 L.	17 graen	$2054\frac{8}{18}$
♀	10 L.	1 graen		♀	11 L.	1 graen	
☽	5 L.	16 gr.	2057	☽	4 L.	16 gr.	$2054\frac{5}{18}$
♀	10 L.	2 gr.		♀	11 L.	2 gr.	
☽	5 L.	15 gr.	$2056\frac{15}{18}$	☽	4 L.	15 gr.	$2054\frac{2}{18}$
♀	10 L.	3 gr.		♀	11 L.	3 gr.	
☽	5 L.	14 gr.	$2056\frac{12}{18}$	☽	4 L.	14 gr.	$2053\frac{17}{18}$
♀	10 L.	4 gr.		♀	11 L.	4 gr.	
☽	5 L.	13 gr.	$2056\frac{9}{18}$	☽	4 L.	13 gr.	$2053\frac{14}{18}$
♀	10 L.	5 gr.		♀	11 L.	5 gr.	
☽	5 L.	12 gr.	$2056\frac{6}{18}$	☽	4 L.	12 gr.	$2053\frac{11}{18}$
♀	10 L.	6 gr.		♀	11 L.	6 gr.	
☽	5 L.	11 gr.	$2056\frac{3}{18}$	☽	4 L.	11 gr.	$2053\frac{8}{18}$
♀	10 L.	7 gr.		♀	11 L.	7 gr.	
☽	5 L.	10 gr.	2056	☽	4 L.	10 gr.	$2053\frac{5}{18}$
♀	10 L.	8 gr.		♀	11 L.	8 gr.	
☽	5 L.	9 gr.	$2055\frac{16}{18}$	☽	4 L.	9 gr.	$2053\frac{2}{18}$
♀	10 L.	9 gr.		♀	11 L.	9 gr.	
☽	5 L.	8 gr.	$2055\frac{13}{18}$	☽	4 L.	8 gr.	$2052\frac{17}{18}$
♀	10 L.	10 gr.		♀	11 L.	16 gr.	
☽	5 L.	7 gr.	$2055\frac{10}{18}$	☽	4 L.	8 gr.	$2052\frac{14}{18}$
♀	10 L.	11 gr.		♀	11 L.	16 gr.	
☽	5 L.	6 gr.	$2055\frac{8}{18}$	☽	4 L.	6 gr.	$2052\frac{11}{18}$
♀	10 L.	12 gr.		♀	11 L.	12 gr.	
☽	5 L.	5 gr.	$2055\frac{5}{18}$	☽	4 L.	5 gr.	$2052\frac{8}{18}$
♀	10 L.	13 gr.		♀	11 L.	13 gr.	
☽	5 L.	4 gr.	$2055\frac{2}{18}$	☽	4 L.	4 gr.	$2052\frac{4}{18}$
♀	10 L.	14 gr.		♀	11 L.	14 gr.	
☽	5 L.	3 gr.	2055	☽	4 L.	3 gr.	$1052\frac{1}{18}$
♀	10 L.	15 gr.		♀	11 L.	15 gr.	
☽	5 L.	2 gr.	$2054\frac{15}{18}$	☽	4 L.	2 gr.	$2051\frac{16}{18}$
♀	10 L.	16 gr.		♀	11 L.	16 gr.	
☽	5 L.	1 gr.	$2054\frac{13}{18}$	☽	4 L.	1 gr.	$2051\frac{12}{18}$
♀	10 L.	17 gr.		♀	11 L.	17 gr.	
☽	5 L.	— —	$2054\frac{11}{18}$	☽	4 L.	— —	$2051\frac{9}{18}$
♀	11 L.	— —		♀	12 L.	— —	

☽	3 L.	17 graen	$2051\frac{6}{18}$	☽	2 L.	17 graen	2049
♀	12 L.	1 graen		♀	13 L.	1 graen	
☽	3 L.	16 gr.	$2051\frac{3}{18}$	☽	2 L.	16 gr.	$2048\frac{15}{18}$
♀	12 L.	2 gr.		♀	13 L.	2 gr.	
☽	3 L.	15 gr.	2051	☽	2 L.	15 gr.	$2048\frac{12}{18}$
♀	12 L.	3 gr.		♀	13 L.	3 gr.	
☽	3 L.	14 gr.	$2050\frac{16}{18}$	☽	2 L.	14 gr.	$2048\frac{9}{18}$
♀	12 L.	4 gr.		♀	13 L.	4 gr.	
☽	3 L.	13 gr.	$2050\frac{14}{18}$	☽	2 L.	13 gr.	$2048\frac{6}{18}$
♀	12 L.	5 gr.		♀	13 L.	5 gr.	
☽	3 L.	12 gr.	$2050\frac{12}{18}$	☽	2 L.	12 gr.	$2048\frac{3}{18}$
♀	12 L.	6 gr.		♀	13 L.	6 gr.	
☽	3 L.	11 gr.	$2050\frac{10}{18}$	☽	2 L.	11 gr.	2048
♀	12 L.	7 gr.		♀	13 L.	7 gr.	
☽	3 L.	10 gr.	$2050\frac{8}{18}$	☽	2 L.	10 gr.	$2047\frac{16}{18}$
♀	12 L.	8 gr.		♀	13 L.	8 gr.	
☽	3 L.	9 gr.	$2050\frac{6}{18}$	☽	2 L.	9 gr.	$2047\frac{13}{18}$
♀	12 L.	9 gr.		♀	13 L.	9 gr.	
☽	3 L.	8 gr.	$2050\frac{4}{18}$	☽	2 L.	8 gr.	$2047\frac{10}{18}$
♀	12 L.	10 gr.		♀	13 L.	10 gr.	
☽	3 L.	7 gr.	$2050\frac{1}{18}$	☽	2 L.	7 gr.	$2047\frac{7}{18}$
♀	12 L.	11 gr.		♀	13 L.	11 gr.	
☽	3 L.	6 gr.	$2049\frac{17}{18}$	☽	2 L.	6 gr.	$2047\frac{4}{18}$
♀	12 L.	12 gr.		♀	13 L.	12 gr.	
☽	3 L.	5 gr.	$2049\frac{15}{18}$	☽	2 L.	5 gr.	$2047\frac{1}{18}$
♀	12 L.	13 gr.		♀	13 L.	13 gr.	
☽	3 L.	4 gr.	$2049\frac{13}{18}$	☽	2 L.	4 gr.	$2046\frac{16}{18}$
♀	12 L.	14 gr.		♀	13 L.	14 gr.	
☽	3 L.	3 gr.	$2049\frac{11}{18}$	☽	2 L.	3 gr.	$2046\frac{14}{18}$
♀	12 L.	15 gr.		♀	13 L.	15 gr.	
☽	3 L.	2 gr.	$2049\frac{8}{18}$	☽	2 L.	2 gr.	$2046\frac{12}{18}$
♀	12 L.	16 gr.		♀	13 L.	16 gr.	
☽	3 L.	1 gr.	$2049\frac{6}{18}$	☽	2 L.	1 gr.	$2046\frac{10}{18}$
♀	12 L.	17 gr.		♀	13 L.	17 gr.	
☽	3 L.	— —	$2049\frac{3}{18}$	☽	2 L.	— —	$2046\frac{8}{18}$
♀	13 L.	— —		♀	14 L.	— —	

☽	1 L.	17 graen	$2046\frac{6}{18}$	☽	0 L.	17 graen	$2043\frac{10}{18}$
♀	14 L.	1 graen		♀	15 L.	1 graen	
☽	1 L.	16 gr.	$2046\frac{3}{18}$	☽	0 L.	16 gr.	$2043\frac{7}{18}$
♀	14 L.	2 gr.		♀	15 L.	2 gr.	
☽	1 L.	15 gr.	2046	☽	0 L.	15 gr.	$2043\frac{4}{18}$
♀	14 L.	3 gr.		♀	15 L.	3 gr.	
☽	1 L.	14 gr.	$2045\frac{15}{18}$	☽	0 L.	14 gr.	$2043\frac{2}{18}$
♀	14 L.	4 gr.		♀	15 L.	4 gr.	
☽	1 L.	13 gr.	$2045\frac{12}{18}$	☽	0 L.	13 gr.	2043
♀	14 L.	6 gr.		♀	15 L.	5 gr.	
☽	1 L.	12 gr.	$2045\frac{9}{18}$	☽	0 L.	12 gr.	$2042\frac{15}{18}$
♀	14 L.	6 gr.		♀	15 L.	6 gr.	
☽	1 L.	11 gr.	$2045\frac{6}{18}$	☽	0 L.	11 gr.	$2042\frac{12}{18}$
♀	14 L.	7 gr.		♀	15 L.	7 gr.	
☽	1 L.	10 gr.	$2045\frac{3}{18}$	☽	0 L.	10 gr.	$2042\frac{9}{18}$
♀	14 L.	8 gr.		♀	15 L.	8 gr.	
☽	1 L.	9 gr.	2045	☽	0 L.	9 gr.	$2042\frac{6}{18}$
♀	14 L.	9 gr.		♀	15 L.	9 gr.	
☽	1 L.	8 gr.	$2044\frac{16}{18}$	☽	0 L.	8 gr.	$2042\frac{3}{18}$
♀	14 L.	10 gr.		♀	15 L.	10 gr.	
☽	1 L.	7 gr.	$2044\frac{13}{18}$	☽	0 L.	7 gr.	2042
♀	14 L.	11 gr.		♀	15 L.	11 gr.	
☽	1 L.	6 gr.	$2044\frac{10}{18}$	☽	0 L.	6 gr.	$2041\frac{16}{18}$
♀	14 L.	12 gr.		♀	15 L.	12 gr.	
☽	1 L.	5 gr.	$2044\frac{7}{18}$	☽	0 L.	5 gr.	$2041\frac{13}{18}$
♀	14 L.	14 gr.		♀	15 L.	13 gr.	
☽	1 L.	4 gr.	$2044\frac{4}{18}$	☽	0 L.	4 gr.	$2041\frac{10}{18}$
♀	14 L.	14 gr.		♀	15 L.	14 gr.	
☽	1 L.	3 gr.	$2044\frac{2}{18}$	☽	0 L.	3 gr.	$2041\frac{7}{18}$
♀	14 L.	15 gr.		♀	15 L.	15 gr.	
☽	1 L.	2 gr.	2044	☽	0 L.	2 gr.	$2041\frac{4}{18}$
♀	14 L.	17 gr.		♀	15 L.	16 gr.	
☽	1 L.	1 gr.	$2043\frac{15}{18}$	☽	0 L.	1 gr.	$2041\frac{2}{18}$
♀	14 L.	17 gr.		♀	15 L.	17 gr.	
☽	1 L.	— —	$2043\frac{13}{18}$				
♀	15 L.	— —		♀	16 L	- - -	2041

DE SVLCIS COCHLEATIS ad datam diſtantiam TVBIS SCLOPETORVM recte inducendis.

Ioh. Georg. Leutmann.

I.

TVbos ſclopetorum cochleis intus excauatos, et ratione ſtructurae, et ratione effectus, ad Mechanicam pertinere, neminem eſſe puto qui dubitet, et quanquam opificium labor ſit, eas perficere, attamen iuſtam et debitam inductionem helicum, niſi labor a perito Mechanico dirigatur, ab eoque informati atque edocti fuerint opifices, vitioſam deprehendentes et intentioni minus reſpondentem.

2. Primus, qui hanc finxit in tubis formam, procul dubio eum habuit finem, vt globus per gyrum, ope cochlearum, inductum, aerem terebrando facilius penetret atque ſecet, prohibeatque ne linea directionis, globum impellens, a recta nimium deflectat via, et tandem corpus reſiſtens, ad quod tendit globus, vehementius feriatur et traiectetur, quando globus gyrando illud perterebrat.

3. Haec nunquam obtinebitur intentio, niſi helices aequabili plane gyro tubo fuerint inductae, gy-

gyrumque exacte parallelum ſeruent, vt motum globulo vniformem imprimere valeant.

4. Cognoſcitur vitium helicum, ſi in tubum ſclopeti plumbum liquefactum infundatur, et cylindrus plumbeus refrigeratus helicibus prominentibus, ad modulum tubi factus, et ſpitamae longitudinis, formetur. Hic, ſi ope virgulae ferreae, ſeu potius chalybeae, per totum canalem ſclopeti pertrudatur atque vi expellatur, indicabit vel iuſtam vel vitioſam helicum formam.

5. Si enim leniter et ſine magna reſiſtentia protrudi poteſt cylindrus plumbeus, et facile cedit, poſtquam oleo intus bene inunctus fuerit tubus, indicio eſt, helices tubi recte eſſe efformatas. Si vero magna cum vehementia et vi propellendus eſt cylindrus, tunc videbis, helices eius protuberantes e ſitu ſuo debito eſſe depulſas et deflexas, vel graciliores redditas, vel plane deprauatas, quod docebit vitium in elaborandis helicibus tubi commiſſum.

6. Modus conficiendi eiusmodi canales cochleatos, quo vtuntur optimi artifices, in eo conſiſtit, vt canali eiusmodi ferreo, recte iam helicibus excauato, immittant virgam chalybeam duplicis longitudinis canalis, et ad eius medium, in extremo tubi poſitum, ſuperinfundant in canalem plumbum liquefactum, formentque eiusmodi cylindrum plumbeum, virgae chalybeae circumfuſum, eique firmiter adhaerentem, qualem §. 4. deſcripſimus.

7. In virgae extremo adaptant atque firmant cylindrum ligneum. Huic cylindro immittunt li-

mam

mam tenuem aliquantulum oblique ſitam, ad ductum helicum in tubo iamiam exaratarum.

8. Cylindrus ligneus foramini conficiendi novi ſclopeti proportionalis ſit, illudque exacte repleat, ita tamen, vt obſequioſe cis et retro agitari poſſit. Lima vero, in ligneo hoc cylindro recondita, acie aliquantulum promineat, vt pertruſo cylindro tubo rimam levem inducat, et quando leniter tranſit lima, papyro ſubiecto eleuetur tantiſper, vt iterum vlterius excauet gyralem rimam, et ſic iteratis ductibus cylindri, et eleuationibus limae, ſulcus ſatis profunde exaratur.

9. His recte praeparatis, vtrique tubi, et cochleatus et cochleandus, in linea recta firmantur, et pertruditur virga chalybea per vtroſque, operatioque,vt iam indicatum,perficitur. Hoc modo recipit nouus tubus prima lineamenta de helice inducenda, vlteriusque perficitur.

10. Totam operationem deſcribere ſuperſedeo, ad opificem ea magis pertinet, quam ad Mechanicum. Totum vero modum indicare volui, vt intelligatur, quomodo nouo tubo idem gyrus helicum inducatur, qui in elaborato tubo tanquam prototypo erat expreſſus. Prodiit itaque nouus tubus in quo vnus circuitus helicum aequalis eſt diſtantiae gyrarum alterius.

11. Quandoquidem vero vulgarem gyrationem helicum ita conficere ſoleant artis ſclopetariae magiſtri, vt vnus circuitus helicis duos pedes aequet vtplurimum, ita vt quando gyrus lineam rectam, a qua

qua incepit, iterum tangit, longitudo lineae rectae duos pedes abſoluat, et formata tandem machina exarandis tubis cochleatis apta, ad quam conſtruendam tubum cochleatum ab alio magiſtro pro modulo ſibi comparant, nullam amplius vel extenſiorem formam, vel conciſiorem, quae difficilior, tubis incidere valeant, quam quae ipſorum machinae reſpondet, et ſine tubo, in quo aliter inciſae ſunt helices, aliam formam in nouo tubo conficiendo parare neſciunt. Inueni et in praxin deduxi methodum, qua mediante ad quamuis datam longitudinem vnus circuitus helicum formari poteſt, et quidem exactiſſime absque vitio in circuitu helicum metuendo.

12. Formetur (1) ex charta parallelogrammum, quod exacte cylindro ligneo circumuolutum, eum includere aptum eſt.

(2) Cylindrus torno accurate ſit elaboratus 3 fere digitos in diametro habens, longitudo ſit ad placitum.

(3) Si itaque deſideretur diſtantia helicis cylindro imprimendae vnius pedis, vt intra hanc longitudinem helix vnum circuitum abſoluat,

(4) Delineetur longitudo vnius pedis in parallelogrammo chartaceo, in vtroque latere longitudinari, et per latitudinem ducatur recta, et fiat etiam in parallelogrammo iſto vnum pedem longo diagonalis. Hoc repetatur in noua charta toties, quoties longitudo cylindri id requirit.

(5) Circumuoluatur parallelogrammum cylindro et agglutinetur ſuper cylindrum, vt latera ſibi ex-

acte reſpondeant, absque extenſione parallelogrammi chartacei. Addatur alterum parallelogrammum, ita vt ductae diagonales ſeſe excipiant, tunc iſtae formabunt gyrum vniformiter circa cylindrum progredientem, et ad vnius pedis diſtantiam circuitum vnum abſoluentem.

(6) Incidatur gyrus helicis lima acuta et tenui in cylindro ligneo ad profunditatem lineae vnius digiti, et habebis delineationem helicis deſideratae in cylindro ligneo ſignatam.

13. Vt vero de exactitudine atque parallelo ductu helicis certus ſis, poteris probam ſequenti ratione inſtituere:

(1) Ducatur recta per totum cylindrum, eique parallelae aequidiſtantes plures e. gr. 6. 8. 10.

(2) Fiant ad vnum circuitum helicis, h. l. ad longitudinem vnius pedis, circuli aequidiſtantes et cylindrum circumdantes tot, quot lineae per longitudinem cylindri fuerunt ductae. Tunc videbis quod per ſectiones circulorum cum rectis helix accurate tranſeat, quod indicio eſt helicem eſſe accuratam.

14. Simul vero concipi poteſt inaequalis progreſſus helicum, qui vitioſus, ſi ſcil. circuli inaequaliter diſtent, vel rectae modo latius modo arctius occupent ſpatium, et tamen helix ex vno interſectionis puncto per alterum ducatur, tunc circumuoluta helix vitiatur, et hoc modo exarati in tubum ſclopeti ſulci, ſclopetum facient vitioſum motumque globulo, aequaliter imprimendum, turbabunt.

15. Maxime hoc contigiſſe obſeruaui in plurimis

rimis tubis, quibus ope cylindrioli chalybei acie et prominente et tanta obliquitate, quantam helici conuenientem arbitrati, ſunt praediti, et vi impulſi vt per tubum tranſeat acieque ſua ſulcum cochleae formet. In illis vix inter triginta vnicum tubum, recte conſtitutum, inueni in quo fortuito recte ceſſit opus, id quod per criterium §. 4. datum, experiri poteram. Talia ſclopeta in Curonia et Liuonia a ruſticis fabris ferrariis elaborantur, et raro adipiſcuntur iuſtum helicis ductum.

16. Vt vero recte ducta helix §. 12. deſcripta, vſui cedat, fiat

(1) Parallelepipedum ligneum 7. dig. craſſum, intus cauitate rotunda peruium, diameter cauitatis aequet 3 dig. longitudo parallelepipedis ſpitamam.

(2) Muniantur vtraque extrema annulis ferreis externe, ad cauitatem internam recipiant duos annulos orichalceos torno elaboratos, eiusdem plane amplitudinis qualem cylindrus §. 12. deſcriptus requirit, vt arcte quidem, ſed non coacte pertranſire poſſit annulos cylindrus, lati ſint annuli 2. dig. craſſi duas vel tres lineas.

(3) Hi annuli immittantur et firmentur in cauitatis parallelepipedi extremis interioribus, vt firmi ſtent atque immobiles.

(4) In ſuperiore parte parallelepipedi caui fiat foramen rotundum, in cauitatem vsque, 1 dig. in diametro. Elaboretur cylindriolus metallicus, in medio per longitudinem quadrato foramine oblongo peruius, longus et latus ad proportionem foraminis

in parallelepipedo facti, in ſuperiore ſuperficie latum ſatis orbem ſeu limbum habens, cuius diameter ad minimum 3. dig. aequet craſſities 1. lin.

(5) In cylindrioli foramen oblongo quadratum imponatur priſma quadrangulare chalybeum, foramini exacte aptum, cuius longitudo excedat ad 3. et vltra lineas longitudinem cylindri metallici, et in vno extremo in aciem longam inſtar cultri deſinat ad vtrumque latus priſmatis latius.

(6) Metallicus cylindrus immittatur in foramen parallelepipedi lignei, vt in eo circumgyrari poſſit, incumbente ſuperiore orbe ſeu limbo lateri ſuperiori parallelepipedi.

(7) In parallelepipedum cauum immittatur cylindrus ligneus §. 12. deſcriptus, et ita dirigatur, vt circumducendo metallicum cylindriolum, eius priſmatis quadrati acies ad crenam cochleae, ligneo cylindro inciſae, quadret, eamque intret.

(8) Firmetur tunc limbus cylindrioli metallici, vt datum ſitum mutuare, aut eius priſma chalybeum ex crena cylindri lignei extorqueri nequeat. Super priſma vero chalybeum adaptetur cochlea mas, quae, in foemina ſua circumducta, nitatur in priſma, ne retrocedat, ſed in crena ſua ſemper contineatur atque conſeruetur.

(9) Cylindrus vero ligneus ita ſit adornatus, vt ope manubrii transverſe poſiti atque verſatilis, facile huc et illuc agitari, ſimulque in iſto motu circumgyrari poſſit, id quod ſua ſponte fiet, quia acies priſmatis, in crena helicis poſita, ſpontaneam circum-

cumgyrationem cauſabitur in adducendo et reducendo cylindro, non reſiſtente manubrio verſatili.

(10) Agitatio itaque hoc cylindro ligneo, dens ſeu priſma chalybeum in crena cylindri ſe continens, nullum alium cylindro concedit motum, quam gyralem, ad ductum crenae in longitudinem procedentem.

(11) Tandem cochlea priſmati incumbens ad quartam partem ſui gyri adducatur, et ſic vi imprimatur aliquantiſper priſma, acie praeditum, in cylindrum ligneum, et agitetur cylindrus, vt dens impreſſus crenam ſuam radat, eamque ampliorem reddat. Hoc ſaepius reiteratum, crenam et latam et profundam pro lubitu faciet dens, acies vero ſemper ad centrum vergens viam excauabit, ex qua priſmati excedere non dabitur. Et ſic gyratio cylindri ad deſideratam diſtantiam helicis erit inſtructa, et machina exarandis ſulcis ſclopetorum cochleatis parata.

17. Caeterum quomodo virga chalybea, cum embolo ligneo, lima tenui praedito, ad inducendas crenas, in tubum ſclopeti ferreum, ſit adornanda, quod artis rei ſclopetariae peritis ſatis notum, non opus vt deſcribatur.

18. Conſtat vero ex iam dictis, quomodo quaelibet helix, ad datam diſtantiam, recte deſcribi, iuſte excauari, et conficiendis tubis ſclopetorum, intus cochleandis, applicari debeat, vt ſclopeta prodeant perfectiora, rei venatoriae maxime vtilia ac neceſſaria.

DE TERMINIS GENERALIBVS SERIERVM.

Auctore

C. G.

I.

T*Erminus generalis* ſeriei eſt formula quae per quantitatem quandam variabilem x aequalem exponenti termini quaeſiti exhibet ipſum terminum quaeſitum ſeriei, vt ſi terminus generalis ſit x^2+x+1. et quaeratur terminus decimus ſeriei , habebitur $100+10+1$. $=$ termino quaeſito 111 ; ſi $x^x+a^x+x^a$. ſit terminus generalis erit terminus tertius $27+a^3+3^a$ &c.

II. *Lex progreſſionis* eſt formula, cuius ope ex dato vno vel pluribus terminis ſeriei inuenitur terminus alius antecedens vel conſequens ; vt ſi lex terminorum ſit $m\mathrm{A}=\mathrm{B}$. vbi A denotet terminum quemcunque datum , m numerum datum, B terminum proxime ſequentem inueniendum , vel ſi lex terminorum ſit $\frac{m\mathrm{A}+n\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}=\mathrm{C}$. vbi A. et B. ſignificent terminos datos contiguos , m. et n. numeros datos, C. terminum proxime ſequentem inueniendum.

III. Eſt autem *lex progreſſionis* duplex vel (1) *conſtans* et *certa* quae ſcilicet dato vno vel pluribus terminis terminum alium ſequentem vel anteceden-

tem

tem ſufficienter definit, quales ſunt formulae quas modo allegauimus, datis enim quantitatibus m et A. per legem progreſſionis formula $mA=B$. expreſſam recte determinatur quantitas B. vti etiam datis quantitatibus m et n. atque terminis A et B. per legem progreſſionis $\frac{mA+nB}{A+B}=C$. certo definitur terminus C. vel (2) *variabilis* quae dato vno vel pluribus terminis ſeriei nequit exprimere terminum quaeſitum ſequentem vel antecedentem niſi etiam exponentes terminorum datorum dati ſint, hoc eſt, niſi conſtet quotus terminus in ſerie ſit datus A vel B. huiusmodi lex progreſſionis eſt $Ax=B$. dato enim termino $A=6$. per hanc legem progreſſionis non determinatur quantitas B. niſi praeterea conſtet quotus ſit terminus A. in ſua ſerie; quem ſi ponamus tertium fiet $x=3$ adeoque $6.3=18=B$.

IV. Inter ſeries conſtantis progreſſionis, facillimae ſunt quae *recurrentes* vocantur et reduci posſunt ad aequationem $mA+nB+pC+$&c.$=N$. vbi A, B, C. &c. denotant terminos ordine ſequentes, m, n, p. &c. numeros conſtantes, N. terminum ſequentem ex datis definiendum. Terminum vero generalem harum ſerierum exprimere docuit Cl. Daniel Bernoullius nec dubito quin methodus qua vtitur ad inueniendos alios ſerierum conſtantis progresſionis terminos generales ducat, ſi porro excolatur; ſimili enim ratione terminus generalis ſeriei cuius terminus primus $=1$. lex progreſſionis $mA+n=B$. deprehenditur $\frac{(m+n-1)m^{x-1}-n}{m-1}$ vbi m. ſit numerus qui-

quicunque conſtans praeter vnitatem quo caſu ſatisfacit terminus generalis $nx-n+1$. Si datae ſeriei duo priores termini ſint α. et β. lex progreſſionis $\frac{mB^2}{A}=C$. erit terminus generalis huius ſeriei $\frac{m^{(xx-3x+2):2}\beta^{x-1}}{\alpha^{x-2}}$ &c.

Quod ad alterum genus progreſſionum attinet in quarum formulis quantitas variabilis x reperitur, fatendum quidem eſt dari ſeries progreſſionis planae ac perſpicuae, vt $Ax=B$; $A+\frac{1}{x}=B$ &c. quarum termini generales adhuc deſiderantur, ſed tamen e contrario multae quarum progreſſio perquam obſcura eſt ad terminum generalem adhibita induſtria reduci poſſunt; ſic data lege progreſſionis $Ax+(x+1)^m-x(x-1)^{m+1}=B$ non illico apparet formulam terminorum qui huic legi reſpondeant eſſe $x^m+(x-1)^{m+1}$ vel formulam terminorum qui reſpondeant legi $m(A-a^x)+a^{x+1}=B$ eſſe a^x+m^x. vel legem progreſſionis $Ax+(x+1)^{x+1}-x(x-1)^x=B$. conuenire termino generali $x^x+(x-1)^x$. ſi nempe in his exemplis ſumatur x pro exponente termini dati A.

V. Sed quaecunque ſit iſta progreſſionum varietas, certum eſt ſeries omnes ad terminum generalem ſaltem infinitum reuocari poſſe. Sit enim data ſeries

$$(A)\, a+b+c+d+\&c.$$

erit formula eius ſeu terminus generalis ſaltem infinitus

(B)

$$(B)\, a + (b-a)(x-1) + (c-2b+a)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)$$
$$+ (d-3c+3b-a)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right) + \&c.$$

ſecundum hunc Canonem exempli gratia ſeries

$$(C)\, 1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{11}{6} + \tfrac{25}{12} + \tfrac{137}{60} + \tfrac{49}{20} + \&c.$$

quae eſt ſummatrix ſeriei $\frac{1}{x}$

$$(D)\, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \&c.$$

comparando terminos (C) cum terminis (A) $a = 1$. $b = \frac{3}{2}$. $c = \frac{11}{6}$. $d = \frac{25}{12}$. &c. iisque valoribus ſubſtitutis in B reducitur ad terminum generalem.

$$(E)\, 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{6}(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right) + \tfrac{1}{12}(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right) \&c.$$

6. Vſus huius termini generalis praecipuus eſt in interpolandis ſerierum terminis ſiue in exprimendis per ſeriem valoribus terminorum qui exponenti cuiuis non-integro reſpondent; nam ſi verbi gr. in ſerie (C) quaeratur terminus medius inter terminum primum 1 et ſecundum $\frac{3}{2}$. valor huius termini quaeſiti exprimetur per ſeriem (E) ſi in eadem pro exponente x ponatur exponens termini quaeſiti $\frac{3}{2}$ hoc modo

$$(F)\, 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{6.2.4} + \frac{1.3}{12.2.4.6.} + \frac{1.3.5}{20.2.4.6.8} + \&c.$$

ſed cum aliunde notum ſit ſummam ſeriei $\frac{f}{xx+fx}$ aequalem eſſe tot terminis ſeriei (D) quot numerus f continet vnitates (nempe ſummam ſeriei $\frac{1}{xx+x}$ eſſe $= 1$ ſummam ſeriei $\frac{2}{xx+2x}$ eſſe $= 1 + \frac{1}{2}$ et ſimiliter ceteras) conſequitur dictam ſeriem $\frac{f}{xx+fx}$ dato f numero conſtante quocunque aequalem eſſe ſeriei (E) ſi in hac pro x ponatur f adeoque in noſtro caſu ſeriem (F) eſſe aequalem

$$(G)\, \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{14} + \tfrac{3}{27} + \tfrac{3}{44} + \&c.$$

7. Simili ratione ſummam datae cuiuscunque ſeriei reducere licebit ad terminum aliquem medium alius ſeriei, nam ſi x. ſumatur $=$ numero cuidam affirmatiuo non–integro et fiat datae ſeriei terminus $= (c-2b+a)(x-1)\frac{(x-2)}{2}$ et ſic reliqui, reducta erit ſumma ſeriei prioris ad terminum reſpondentem exponenti x. in hac ſerie $a+b+c+$&. Sic data exempli gratia ſerie $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}+\frac{3}{2.4.6}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.10}$ &c. poſitoque $x=\frac{3}{2}$ fiet $a=1.b=2.c=4.$&c. cuius nouae ſeriei terminus generalis eſt 2^{x-1} in quo ſi rurſus ponatur $x=\frac{3}{2}$ obtinebitur ſumma ſeriei datae $=\sqrt{2}$.

8. Quin etiam ex his patet quantitatem $\alpha\beta$ (vbi β ſit $=$ ſeriei cuicunque $a+b+c+d+$&c.) eſſe aequalem ſeriei $\alpha^a+(\alpha^b-\alpha^a)(x-1)+(\alpha^c-2\alpha^b+\alpha^a)(x-1)(\frac{x-2}{2})+$ &c. poſito $x=$ numero non-integro.

9. Sed fieri poteſt vt ſeries quae elicitur ex formula (B) ſit diuergens atque adeo minus apta ad exprimendum valorem qui quaeritur, niſi in aliam conuergentem transmutetur. Sit data ſeries

(H) $1+1.2+1.2.3+1.2.3.4.+$&c.

quæ ſeruat legem progreſſionis $A(x+1)=B$. reducetur ea per formulam (B) ad terminum generalem. (I) $1+(x-1)+3(x-1)(\frac{x-2}{2})+11(x-1)(\frac{-2}{2})(\frac{x-3}{3})+$&c. igitur ſi quaeratur terminus medius inter primum et ſecundum, exprimetur is facto $x=\frac{3}{2}$ per ſeriem.

(K) $1+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{11}{16}-\frac{265}{128}+$&c.

quae cum ſit diuergens, valor eius per ſeriem conuergentem dabitur hoc modo: inuertantur omnes termini ſeriei (H) vt fiat

(L)

(L) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+$ &c.

in hac per formulam (B) inuenietur terminus reſpondens exponenti $\frac{3}{2}$

(M) $1-\frac{1}{2\cdot2}-\frac{1}{6\cdot2\cdot4}+\frac{1\cdot3}{24\cdot2\cdot4\cdot6}+\frac{19\cdot3\cdot5}{120\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8}+$ &c.

quam ſeriem aggregatis terminorum qui per ſigna $+$ vel $-$ coniuncti ſunt continuo decreſcentibus patet eſſe conuergentem; poſito igitur valore eius $=m$ erit terminus quaeſitus inter primum et ſecundum ſeriei (H) $=\frac{1}{m}$. Eundem valorem etiam per ſeriem terminorum prorſus affirmatiuorum conſequemur, ſi ſumamus terminum medium inter primum et ſecundum ſeriei

(N) $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{6}+\frac{4}{24}+\frac{5}{120}+$ &c.

cuius numeratores progrediuntur ordine numerorum naturali, denominatores autem ſecundum ſeriem (H) erit is terminus medius $=$

(O) $1+0+\frac{1}{2\cdot2\cdot4}+\frac{2\cdot3}{3\cdot2\cdot4\cdot6}+\frac{5\cdot3\cdot5}{8\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8}+$ &c.

cuius ſeriei ſummam ſi ponamus $=n$ erit valor termini medii inter primum et ſecundum in ſerie (H) $=\frac{3}{2n}$.

10. Terminum generalem hactenus dedimus qui exponenti non integro conueniat, per ſummam alicuius ſeriei infinitae, cuius nimirum termini continuo addendi ſunt, ſupereſt alia forma termini generalis quae per continuas multiplicationes procedens vnicum quidem numerum, ſed ſaepe in infinitum extenſum efficit. Sit ſeries data quaecunque

(P) $a+ab+ab^2c^2+ab^3c^6d^6+ab^4c^{12}d^{24}e^{24}+$ &c.

erit eius terminus generalis.

$(Q)\, a b^{(x-1)} c^{(x-1)(x-2)} d^{(x-1)(x-2)(x-3)} e^{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ &c.

Si exempli gratia fuerit ſeries

$$(R)\, 1 + 2 + 36 + 23887872 + \&c.$$

comparatis ſingulis terminis ſeriei (R) cum terminis ſerie(P) inuenietur $a = 1.\ b = 2.\ c = 3$ &c. igitur ſi verbi gr. quaeratur terminus medius inter primum et ſecundum ſeriei (R) valor eius exprimetur per ſeriem (Q) facto $x = \frac{3}{2}$.

$$1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{-1}{4}} 4^{\frac{3}{8}} 5^{\frac{-3.5}{16}} 6^{\frac{3.5.7}{32}} 7^{\frac{-3.5.7.9}{64}} \&c.$$

ſimiliter ſi ſeries data fuerit

$$a^1 + a^2 + a^{11} + a^{\frac{108}{5}} + a^{\frac{323}{7}} + \&c.$$

hoc eſt $a = b = c.\ d = a^{\frac{1}{3}}.\ e = a^{\frac{1}{3.5}}.\ f = a^{\frac{1}{3.5.7}}$ &c.
erit terminus medius inter primum et ſecundum

$$a^{\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \&c.\right)} = a^{\frac{4}{3}}.$$

perinde ac ſi terminus medius inter primum et ſecundum in ſerie exponentium $1 + 2 + 5 + 11 + \frac{108}{5} + \&c.$ ope formulae (B) quaeſitus fuiſſet.

11. Si quis denique ſecum expendat formulas *exponentiales*, quae optimo ſucceſſu ad exprimendas multarum ſerierum leges adhibentur nonniſi arbitrario quodam conſenſu ab Arithmeticis receptas fuiſſe ita vt poſito verbi gratia a^x. quantitas a. toties in ſe ducenda intelligatur quot ipſa exponens x. continet vnitates, is ſane fatebitur nihil obſtare, quin alia inueniantur compendia quibus plures quantitates diuerſae tum addendae, tum multiplicandae vna formula deſignari poſſint, qua de re iam dicere conſtitui

ſtitui. Littera e. hoc loco vtar pro exponente *ſucceſſiua* ita vt numeris 1, 2, 3. &c. deinceps aequalis ponenda ſit donec fiat $= n$. hoc eſt numero cuicunque determinanti quot termini vel addendi vel multiplicandi ſint, denotabit autem linea ſuperior $\overline{n}$. exponentem terminorum addendorum, inferior $\underline{n}$. exponentem terminorum multiplicandorum quod exemplis declarabimus. Sit data formula $(ex+ſ)^{\overline{3}}$. fiet $\overline{n}=3$. hoc eſt tres numeri ſunt addendi quos vt eruam ſit (1) $e=1$. erit terminus primus $x+ſ$: (2) $e=2$. ergo terminus ſecundus $2x+ſ$. et ſimiliter tertius $3x+ſ$. igitur $(ex+ſ)^{\overline{3}}=6x+3ſ$. et $(ex+ſ)^{\underline{3}}$ $=(x+ſ)(2x+ſ)(3x+ſ)=6x^3+11ſx^2+6ſ^2x+ſ^3$ Simili modo fiet $[(ee+e)\,xx+e^x]^{\overline{2}} = (2xx+1)+(6xx+2^x)$ et $[(ee+e)\,xx+e^x]^{\underline{2}} = (2xx+1)(6xx+2^x)$. &c. vnde patet quotiescunque exponens terminorum addendorum $\overline{n}$. vel exponens terminorum multiplicandorum $\underline{n}$. fuerit numerus integer determinatus, haſce formulas etiam vſitato modo (quamuis ſaepe multo maiore characterum numero opus ſit) deſcribi poſſe, ſin vero n. vel numerus indeterminatus, vel fractus ſurdusue fuerit, non item.

12. Ad hoc formularum genus non modo ipſae formulae ſerierum Algebraicae atque exponentiales reuocari, ſed etiam innumerae aliae ſeries quae neutris ſubiici poſſe credebantur, nullo negotio traduci poſſunt, vt ſi data ſit ſeries quam ſupra conſiderauimus (H) terminus eius generalis hac methodo fiet $e^{\underline{x}}$ nam ſi verbi gr. quaeratur terminus eius ter-

tius fiat (1) $e=1$. (2)$e=2$. (3)$e=3$. hi numeri in ſe ducti dant 6. terminum quaeſitum. Eodem modo ſeries.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{0}+$&c. reuocatur ad terminum generalem $e^{\overline{x\cdot(x+1)}}$

13. Hic inprimis occurrendum puto eorum opinioni qui hanc methodum, nondum perſpecta vtilitate, propterea reiicient, quod huiusmodi terminus generalis a nobis deſcriptus non minuat laborem in inueſtigando termino ſeriei, qui quaeritur, quandoquidem verbi gr. decimus terminus inueniri non poteſt niſi poſt nouem antecedentes inuentos; Quibus reſpondeo ad terminum generalem ſeriei non id requiri vt terminum quaeſitum citiſſime prodat, ſed hoc ſolum ſufficere vt terminos omnes ſeriei ope quantitatis cuiusdam variabilis atque exponenti terminorum reſpondentis aequabiliter exprimat. Sic nemo negauerit ſeriem terminorum $a+a^2+a^3+a^4+$&c. recte exprimi per terminum generalem a^x. at ſi poſito $a=7$. $x=3$. inueniendus ſit terminus tertius ſeriei, quid quaeſo confert formula generalis a^x. ad numerum 7. ter in ſe ducendum vt prodeat 343? Quin imo ſi facilior in quibusdam ſeriebus terminorum progreſſio eſt, id ex recepto numerandi genere per decades potius, quam ex formula termini generalis deducendum videtur, vt ſi in ſerie a^x. ponatur $a=10$.

14. Neque moror aliam difficultatem, quod valores terminorum exponentibus fractis reſpon-

den-

dentium per hoc nouum formularum genus non exprimantur diſtincte, eadem enim difficultas eſt in omnibus formulis *exponentialibus*, nec vitari omnino poteſt; et quid iuuat terminum medium inter primum et ſecundum in ſerie 2^{x-1} exprimere per $2^{\frac{1}{2}}$ vel $\sqrt{2}$. niſi magnitudini eius limites ſtatuamus per approximationes vel ſeries? Nam et vulgaris extractis radicis quadratae ex numero 2. nihil aliud eſt quam ſeries $1 + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \&c = \sqrt{2}$.
Hac lege vt numeratores *a. b. c.* &c. ſint numeri integri affirmatiui non maiores quam 9. Quod ſi igitur obſcurus videatur eiusmodi valor $e^{\underline{3:2}}$ eundem non minus accurate quam valorem $\sqrt{2}$. determinare licebit methodo quam §. 9. indicauimus. Vſus vero nouarum formularum eo patebit, quod innumeras ſeries, etiam ſummatrices, quarum leges nonniſi per multas ambages deſcribi poſſent, quam breuiſſime exprimant, vti alio loco oſtendemus.

CLAS-

CLASSIS
SECVNDA
CONTINENS
PHYSICA.

MONSTRVM CASANENSE

Cuius Pag. 416 Commentarior. Acad. Tom. II. mentio ſacta eſt

A

Io. Georg Du Vernoi.

ECce! opinor prodigii, ſi ita loqui fas eſt, microcoſmici formidabilem exceſſum, in ea ſpeciatim hypotheſi, qua ante conceptum omnium partium cum contentarum tum continentium formatio ſeu praeexiſtentia, nexusque et conſenſus earundem ſtabilitur.

Sint nempe gemellae optime conformatae. Caſum finge, in quo artificioſa diſſectione, tota pars antica pectoris, prout in inciſione cadauerum in vſu

eſt, vnaque regio ventris vmbilicotenus reſecta fuerit: Eodem tempore, duo oſſa ſterni e ſua ſede naturali auulſa ac in vtrumque latus tranſpoſita: Item ambo capita verticaliter iuxta ductum ſuturae coronalis et ſagittalis anterius poſteriusque ad foramen vsque occipitis ſic diuiſa, vt integrum hemiſphaerium capitis vtrinque deficiat: Poſtea finge, ventres, pectora et capita ſic patula, more duorum hominum ſibi incumbentium ſuper impoſita mutuo iungi ac ita rurſus conſociari, vt vita in ſaluo ſit.

Equidem, ſi iuxta hypotheſin talia in vtero portenta fieri poſſunt, ſi totum caluariae hemiſphaerium a ſummo vertice vsque ad imum mentum et occiput tollere fas eſt, ſi menyngum, cerebri, medullae oblongatae, vaſorum neruorumque inſignium iactura fieri, ſi membra in nihilum redigi aut transſlocari, ſi vaſa maxima absque ſuppuratione aperiri, ſi ſanguis ex vno in aliud corpus transfundi poteſt, verbo, ſi tam ſtupendae demolitiones, compoſitiones operationesque nouae ſalua vita, ſalua conformatione contingere poſſunt, ecquid demum in corporis humani ſcientia, in praeceptis et fundamentis medicis, quibus hodie ars medica ſuperſtructa eſt, firmum erit? Eccur ſimilia portenta extra vterum non obſeruantur? Vndenam effectuum adeo contrariorum cauſa naturalis petenda erit, ſaluis aeternis legibus humanae naturae impreſſis innatisque, a quibus ipſa ne latum vnguem recedere poteſt, teſte omnium aetatum experientia.

Quamobrem neceſſe eſt, ad vitandas haſce difficul-

ficultates credere, dari certum tempus poſt conceptum, in quo non totius corporis, verum duntaxat partium quarundam architectura inchoata eſt, illudque tempus eſſe, in quo duo foetus adhuc imperfecti ac ſemi-elaborati variis modis inuicem incorporantur, antequam caput, pectus et abdomen clauſum ſit: Nam ſub iſto tempore cauitates corporis inſtar ſcaphae vel aedificii ſine tecto conſpiciuntur: Viſcera foris pendula ac informia ſunt, nondum compacta, eorumque ſtamina in fluido a quo vix differunt, inſtar nebulae adhuc oberrant, in quo propterea ſtatu haud difficile eſt, vt in generationis negotio praefata ſtamina ſemi-elaborata, cum aliis affinibus, (vel per nudam inclinationem vel per modum alium aeque obſcurum) in mutuos nexus veniant, communi vita gaudeant, adoleſcant, ac denique abſoluto generationis opere communibus integumentis circumueſtiantur.

Hiſce praemiſſis, ad deſcriptionem anatomicam *Monſtri monocephalo bicorporei* nunc deueniendum eſt, incipiendo ab iis deformitatibus quae ante diſſectionem in conſpectum veniunt. Hae ſunt ſeqq.

1. Capitis duabus ceruicibus inſidentis vnitas.

2. Vultus non in directum, ſed verſus humeros proſpiciens.

3. Quaternae auriculae, duae nempe in ſitu ordinario, totidemque poſterius in occipite, ſed mutuo coalitae et coecae, vicemque forte meatuum auditoriorum duo foramina gerunt, praefatis auriculis poſticis ſubiecta, quae in palato deſinunt.

 In

4. In medio ventre perfecta concretio pectorum apparet, cum geminis vtrinque mamillis, duobus dorſis ſibi oppoſitis duobusque brachiorum paribus.

5. In imo denique ventre, conſimilis iunctio obſervatur ad vmbilicum vsque, a quo perfecta gemellarum ſeparatio incipit, cum omnium membrorum perfecta conformatione notisque ſexus foeminini vtrinque eleganter expreſſis. Haec extrinſecus.

Conſideranti capitis interiorem compagem, tota quidem faciei verticisque compages in numero, figura et ſitu oſſium, more aliorum hominum conſpicua eſt. Vbi vero ad occiput ventum eſt, tria osſa ſuturis nouis ac inconſuetis a ſe inuicem diſcreta, partem cranii poſticam quae vno naturaliter oſſe conſtat, efformare conſpiciuntur. In hac oſſium triga, duo oſſa occipitalia geminam ſpinalem medullam transmittentia internoſcere procliue eſt. Tertium in medio conſtitutum, ad figuram rhomboideam accedens, oſſa ſyncipitis repraeſentat.

Pari modo in cauitate ſeu baſi cranii, duo paria oſſium petroſorum internoſcere licet: Nam praeter binas in exteriori parte cranii ſitas ac oſſe ſphenoide diuiſas apophyſes, duae adhuc aliae ſibi contiguae ac iuxta longitudinem locatae, in ima et poſtica cranii regione obſeruantur, quae auriculas poſticas ad quas originaliter pertinent, directe reſpiciunt, quodque admodum mirandum eſt, cum organorum ad auditum neceſſariorum integro apparatu. Deus Immortalis! qualis combinatio et compages mixturaque admirabilis rerum ſtupendarum, puta, exorbitan-

tantiarum defectuumue! Quam pulchra concretio et ſi ita loqui fas eſt, metamorphoſis duorum capitum in vnam communem teſtam ſeu caluariam, in qua vnica duntaxat cauitas adeſt. Sed ecce! dum iſta contingunt, nouum prodigium. Ambo cerebra ſeruata ad ſenſum ordinaria ac conſueta conformatione in unum coaleſcunt. Viceuerſa duo cerebella geminaeque medullae oblongatae et ſpinales, intactae, adeoque diſtinctae ac ſeparatae prouti ſupra indicavimus, apparent. Fluida denique omnia, gemino corde vaſis duplicibus ad praefatum caput vecta, maſſam communem, ſpirituumque adeo officinam mixtam indicare videntur: Propterea haud incredibile eſt fore, vt harum Sororum animae coniunctis ac conſpirantibus viribus mutuo cooperantes, per cogitationum actionumque communicationem, imperium commune in geminum corpus exercuiſſent, ſi ad maturitatem perueniſſent, ad quam vero matris fortaſſis culpa, potius quam conformationis vitio monſtra raro perducuntur.

Sed quis? linguae intuitu geminae, duorum item laryngum, totidemque arteriarum aſperarum, quibus vnus ſolummodo canalis alimentarius interiacet, ſtupore non afficitur. Duarum nempe ſororum organa loquelae ac guſtui dicata vno ore ſimul continentur, harumque linguarum vna, quae ſublimior eſt, maxillam ſuperiorem ſeu palati fornicem, altera ei ſubiecta inferiorem maxillam reſpicit, easque duplex arteria aſpera vnusque amplus oeſophagus prouti dictum eſt, a ſe inuicem ſeparat. Nihil in bi-

binis linguis, quod a conformatione ordinaria alienum eſt, niſi leuis ſolummodo in lingua ſuperiori molis defectus nec non in eius baſi, quaedam particula obſeruatur, eſtque oſſiculum arcus inſtar incurvum, ſpongioſum, valde aſperum, cui lingua mediante membrana rubra totum oſſiculum inueſtiente cohaeret. Haud tamen ſimplex, ſed geminum os eſt, duoque alia ei contigua ſunt corpuſcula, mollia intra eandem membranam contenta, oſſiculum minutisſimum, cauum, forma dimidii ſeminis cannabini includentia, quae omnia ſimul ſumpta, forte maxillarum dentiumque rudimenta ſignificant. Poſtremo, ad eiusdem linguae radicem, duo foramina ſupra iam memorata conſpicua ſunt, ad aures poſticas tendentia, quae nil aliud ſunt, quam tubarum Euſtachii repraeſentationes, quo fit, vt pro pari auricularum numero, quatuor tubae vno ore contineantur. Ac tantum de capite,

Nunc venter medius, in quo ante omnia coalitus ſeu iunctio pectorum, dequa ſupra, oculos ad ſe trahit. Idcirco apertionem thoracis non anterius, vti alias in vſu eſt, verum ad latus vtrumque inſtituere neceſſe fuit. Aſt haec tantum modo minima minusque principalis obſeruatio vocanda eſt. Neque etiam alteram obſeruationem admodum inſignem aut raram nuncupo, quod in vno thorace, geminum partium agmen, quatuor ſcilicet pulmones, duo corda, duo thymi et ſic porro contineantur; Verum praedictorum viſcerum vitalium inuerſio, noua vaſorum oeconomia, coniunctiones cana-

nalium inuſitatae, partium nobilium defectus, potiori iure capitales dici merentur, de quibus mox, poſtquam ſuper liquorem pericardii animaduerſionem haud inutilem expoſuero.

Saepe in examine foetuum rem obſeruaui attentione digniſſimam, quae ad componendam antiquam litem de origine aquae pericardii vſuque thymi, inſeruire poteſt, nimirum aquam pericardii abundare magis eodem tempore quo thymus pericardio incumbens mole ſua luxuriat. Sed de hac re alias.

Primo viſcerum intuitu procliue eſt, eorum inuerſum poſitum ſedemque mutatam agnoſcere, vtpote ad normam poſitionemque ſterni praeter naturalem, de qua ſupra, accommodata lateribusque thoracis parallela: Quamobrem ambarum ſororum viſcera ſic diuiſa ſunt, vt neutra ſororum ea in proprio pectore collectim gerat, verum dimidia pars eorum, in cauitatem alterius ceu alienum domicilium recipitur et viceuerſa. Ceterum, ad colliſionem euitandam, ſeptum membranaceum, pellucidum, ambabus ſpinis firmiter affixum eſt, quo gemini thoracis ſeparatio efformatur.

Ex duobus cordibus, quae hic conſpicua ſunt, vnum (quod reſpectu faciei anticum appello,) cauitatum quidem et auricularum numero ac conformatione debita, alterum vero oppoſitum et poſticum vnica duntaxat cauitate inſtructum eſt magnitudineque priori cedit.

Cuilibet cauitati cordis antici arteria magna vtrinque in arcum inflexa ac iuxta geminae ſpinae

longitudinem deſcendens propria eſt, Viceuerſa truncus arteriae pulmonalis deficit. Ad defectum hunc reſarciendum, vna praedicta arteriarum e dextro ſinu egreſſa, prope ſui initium duos aequales ramos ad pulmonem tendentes efformat: Vice canalis arterioſi ductus alius incuruus ab vno arcu in alterum protenſus cernitur. Ex praefati ductus dorſo, carotidum vna exoritur: Cetera tum capitis tum brachiorum vaſa, ex arcu geminae aortae originem trahunt. Inter vaſa venoſa, ſola vena ſubclauia ſiniſtra, quae loco venae cauae, pulmonalem ſubit, a lege ordinaria aberrat.

In corde altero ſeu oppoſito, vnus duntaxat ſinus, et in eo triplex oſtium, gemina ſcilicet arteria, ac ſinus amplus venoſus venae cauae et pulmonali communis obſeruatur. Arteriarum vna, quae in tres diuiſa eſt ramos, pulmonariae et canalis arterioſi vices gerit. Altera ſiue magna arteria, primo arcum conſtituit, cum quo praememoratus canalis arterioſus inoſculatur, ex cuius dein dorſo aequalis vaſorum capitis et brachiorum numerus, ſicuti in altero latere, conſpicuus eſt. In fine arcus ſubito, ac ſi truncata eſſet, intermittit inque oppoſiti lateris aortam amplo oſtio deſinens, pulchram ac ſtupendam transfuſionis ſocietatisque inter ambo corda imaginem oculis exhibet.

Reſtat deſcriptio imae regionis corporis, in qua ventres gemellarum, prouti diximus, toto eo ſpatio quod a ſcrobiculo cordis vsque ad vmbilicos exten-

tenditur in vnum coaliti ſunt, cetera diuiſi ac ſeparati. Propterea triplex abdomen vno conſpectu intueri fas eſt, vnum commune inter thoraces et vmbilicos, in quo funiculi vmbilicalis ſimplicis inſertio conſpicua eſt, ac vnum cuique ſuum proprium diſtinctum, quod ad oſſa vsque pubis extenditur.

Ad conſpectum vero partium contentarum rite habendum curioſa ac inuſitata cultri directione vti neceſſe fuit ; Nam coeptæ in ſectione thoracis methodo inſiſtendo, vna ſectione ab vno latere verſus alterum latus facta, idque per interſtitium ſeu lineam quae ambas gemellas ſeparat, abdomen commune primum inciſum eſt, poſtea per inciſionem longitudinalem, duo ventres particulares more vulgari ſeparatim aperti fuere.

In neutro horum particularium ventrium, oeconomia partium alterata ac corrupta ; Verum ſingula organa ſitu, numero ac conformatione naturae conſentanea obſeruantur.

Incipit ſolummodo viſcerum facies immutari ſupra vmbilicum in abdomine communi ; Etenim 1. ambo diaphragmata ſic inuicem commixta ſunt, vt vnum, amplum, muſculare planum, cum bis geminis appendicibus ſibi e diametro oppoſitis componant.

2. Viſcerum diaphragmati immediate ſubiectorum cum figura, tum ſitus, inſtar viſcerum thoracis inuerſus eſt: Nam vice gemini hepatis, maſſa oblonga, ex amborum hepatum facie concaua mutuo ſibi agglutina-

tinata conſtans ſub diaphragmate pendula eſt ; Verum loco partis conuexae , qua cum illo coniungi ſolet , ſitu contrario nempe margine ſeu limbo , deorſum ſpectante , ope triplicis vinculi cum diaphragmate connectitur , cuius ſitus inuerſi cauſa factum eſt , vt pars vtraque conuexa praefati hepatis monſtroſi , ambo hypochondria reſpiciat contra naturae conſuetum ordinem. Haud tamen illa duorum hepatum agglutinatio ſeu iunctio tam perfecta eſt , quin in parte ima inter vtrumque marginem , hiatus ſeu interſtitium ſufficiens appareat pro ſede folliculi longioris, in quo copia bilis atrae continetur Gaudet etiam ductu cyſtico bifurcato , vna cum hepatico in cholidochum deſinente.

Loco geminae venae vmbilicalis , vnica adeſt, ſed adeo magna , vt venam cauam ſua amplitudine aequet , ex qua nec non arteriis bis geminis funiculus vmbilicalis conflatus eſt.

Vice gemini ventriculi , vnus ſolummodo conſpicuus eſt, ex amborum agglutinatione efformatus, cuius iunctionis notae partim ex gemino fundo ac amplitudine oeſophagi et pylori, partim ex numero vaſorum, item lienum et omentorum ſatis certae ac euidentes ſunt , in qua porro iunctione ventriculorum , eos ſitum mutauiſſe palam eſt: Is enim more aliorum hominum non tranſuerſus, ſed inſtar lagenæ, erectæ altero orificiorum ſurſum, altero deorſum ſpectante obſeruatur.

Quamobrem vice gemini duodeni , vnum ſimplex inteſtinum ex duobus conglutinatum a pyloro

recta

recta deſcendit, columnæ ſpiralis formam aſſumens, ac per medium meſenterii, ad inferiorem eius tendens fimbriam inque appendiculam vermiformem optime conformatam deſinens. a qua ductus inteſtinalis dextrorſum ſiniſtrorſumque verſus geminam meſenterii fimbriam ad plurium palmorum longitudinem prolongatur, donec abſoluto ambitu, relictoque communi abdomine, in ventrem vtrique particularem deſcendat, ex quo demum ſeries inteſtinorum craſſorum ac ſpeciatim appendix vermiformis in vtroque ventre efformatur.

Itaque, praeter ſupra memoratam vermiformem appendiculam, quae communis eſt, ad huc duas alias, triplexque adeo coecum obſeruare in hoc ſubiecto procliue eſt: Cuilibet enim ventri particulari ſua propria viſcera naturalia more conſueto inſunt, abſque vllo apparente defectu aut inordinatione, niſi pro tali habere velimus biſurcationem, quae in vretere ſiniſtri renis vnius gemellae conſpicua eſt.

MONSTRVM PETROPOLITANVM

Cuius Pag. 416. Commentarior. Acad. Tom. II. mentio facta eſt.

A

I. G. D.

Vetus traditio eſt, edi monſtra ſaepius a mulieribus, quibus alias conceptuum numerus familiaris eſt; Cuius certe initio praecedentis anni , in hac Vrbe Imperiali vivum exemplar nobis oblatum eſt, in perſona mulieris Ruſſicae, quae duorum ſimul foetuum partum aliquoties experta, tandem non ſine foecunditatis faſtidio vice geminae prolis, foetum enixa eſt *bicephalo-monocorporeum*, in quo defectuum exceſſuumve admirabilis permixtio oculos ſpectantium animumque haud parum afficit.

Concipe duos infantes ſeparatos, quibus a ſummo humero vsque ad commiſſuram oſſium pubis, dimidium corporis latus cum brachio et crure amputatum eſt, eo ſolummodo diſcrimine, quod in vno dextrum, in altero ſiniſtrum latus deficiat. Poſtea concipe, corpora ſic mutilata ad ſe inuicem adduci ac copulari communibusque integumentis inueſtiri ac ſi vnus ſimplex truncus foret.

Equi-

Equidem ante diſſectionem nulla exterius deformitas partium in tota trunci ſuperficie conſpicua eſt, nullus exceſſus, nullus defectus ſenſibilis: Pectus, dorſum, venter, vmbilicus, exitus excrementorum, genitalia, mamillae, clunes, extremitates, ſimplices apparent; verum, numerus tantummodo capitum et collorum, item cuſpis ſeu cornu inter duo colla eminens, monſtri aliquid alere videntur: Cuſpis nempe longa, inſtar cornu dura altitudinemque gemini capitis attingens duobus collis interpoſita eſt, quae detracta cute et pinguedine eam inueſtiente, nil aliud quam chaos ſeu triſtes duorum brachiorum ſeu extremitatum ſuperiorum reliquias exhibet: Nam duae exiguae ſcapulæ ſpinarum ſolummodo defectu laborantes, poſtquam coſta ſua inferiore in contactum venere, communem ceruicem efformant, quae baſin praedictae cuſpidi ſuppeditat: Haec vero in tres partes diuiſa eſt, namque oſſe conſtat maiore, cuius amplum et ſphaericum caput praefato ſinui inarticulatum eſt, a quo ſenſim gracileſcens in cuſpidem deſinit, ea que pars loco humeri eſt. Huic appendix ſeu cartilago oblonga mobilis, duarum duntaxat linearum longitudine, cubiti vices implet, Denique in extremo, duo exigua tubercula ſeu verrucae, manuum forte digitorumue rudimenta non immerito appellari poſſunt. Ad geminam porro apophyſin coracoideam, oſſiculum vtrinque adhaeret, cuius etſi forma et ſitus irregulares ſint, connexio tamen praefata clauiculas eſſe arguit, quia ambo haec oſſicula longa ac ſibi parallela verſus ſterni

ni principium recta deſcendunt ibique terminantur. Hactenus de primo capitali obiecto, quod in exteriore ſuperficie occurrit. Cetera non ante conſpicua ſunt, quam vbi remota ſunt integumenta.

Ac ante omnia quidem, in compage thoracis, curioſa ſyntheſis duarum ſpinarum dorſalium cum quadruplici ordine coſtarum in conſpectum venit: Nam quia vnaquaeque ſpina dorſalis non ſolum convenienti vertebrarum numero, ſed et gemina coſtarum ſerie ſeu duodecim vtrinque coſtis inſtructa eſt, ideo in vno thorace 48 coſtae continentur, quarum ſcilicet duodecim ex vno tantum eoque externo latere vtriusque ſpinae prodeuntes eaeque integrae ac inuiolatae, latera thoracis pectusque, mediante oſſe ſterni, clauiculisque vtrinque perfectis, illudque latum et amplum efformant; Aliae vero duodecim coſtae quae ex oppoſito ſeu interno vtriusque ſpinae latere prodeunt, mutuo ſibi iunctae, pectus alterum ſeu ſpurium, cuius vertici cuſpis inſidet, efficiunt; Hae vero coſtae a priorum conſormatione multum differunt: Non enim in arcum flexae, verum rectae, breuiores ac veluti abſciſſae, adinſtar graduum ſcalae inter geminam ſpinam dorſalem tranſuerſim poſitae ac ſine medio inuicem copulatae ſunt, quia Os ſterni deficit, cuius vices forte implet oſſiculum oblongum, tres inter ſuperiores coſtulas vtriusque lateris medium: Reliquae, vti dixi, ſine medio inuicem coeunt, ac oblique ad angulum acutum concurrentes ſpectaculum ſingulare oculis exhibent.

Trun-

Trunci baſis eiusque ſtructura non minus curioſa et admirabilis eſt: Nam quum duae ſpinae dorſales, vti dictum eſt, adſint, duplex ſimul os ſacrum adeſt eas ſuffulciens, quae ambo ſimul per ſymphiſin concreta et connexa ſunt. Igitur illo latere, quo iſta concretio facta eſt, oſſa innominata penitus deficiunt, inque oppoſito duntaxat vtriusque oſſis ſacri latere externo, dicta oſſa conſpicua ſunt: Ex quo aliud nouumque emergit phaenomenum, ſcilicet quod vice duarum, vna ſolummodo peluis datur. Ceterum, ſeu abſentia iacturaue oſſium innominatorum extremitatumque inferiorum quae penitus deficiunt, ſeu translocatio eorum in aliam ſedem, res admiratione digniſſima eſt. Nam quemadmodum ſuper thoracem ſpurium cuſpis poſita eſt vicem brachiorum implens, pari modo infra hunc ſuper ambo ſacra, quoddam oſſeum corpus pollicem latum informe iacet, quod vicem forte oſſium innominatorum artuumque inferiorum implet.

Tantum a communi lege ac ſtatu ordinario ſtructura huiusce monſtri exterior aliena eſt, minime tamen ſine partium interiorum (quae ſub tanta reuolutione magno in diſcrimine ſicuti conſideranti patet conſtitutae fuerunt,) inſigni cataſtrophe, de qua adhuc modo agendum eſt.

Prima itaque obſeruatio generalis haec eſt, quod extremitates reſpectiuae muſculorum, neruorum, vaſorum, membranarumque ſub iunctione vtriusque corpuſculi, mutuo connexae ſint, ex qua vnione, communicatio motuum ac ſenſationum transfuſioque

humorum admirabilis conſequitur. 2. quod viſcera medii ventris, ad vnum quodque indiuiduum ſpeciatim pertinentia, haud diſtinctis cauitatibus, vti decet, verum vno communi domicilio incluſa ſunt, in quo duo thymi, duo corda, quatuor pulmones, duæ arteriae magnae, duae pulmonares, duae venae cauae totidemque pulmonariae, (duo forte etiam ductus chyliferi) cum gemino diaphragmate conſpicua ſunt. 3. Quod loco gemini ventris, vnum commune abdomen adeſt, cum viſceribus fere omnibus duplicatis in eo contentis.

Ad particulares porro circumſtantias ac phaenomena ſingulis partibus propria quod attinet, ea ſic ſe habere nobis viſa ſunt.

1. Tres in thorace caueae admodum diſtinctae conſpicuae ſunt, quarum duae, dextra ſcilicet et ſiniſtra, principales et maiores ac propriis ſeptis transverſis a ventre inferiore ſecluſae, duobus item mediaſtinis e ſpina dorſali vtrinque oriundis et ſterno annexis ab inuicem ſeparatae ſunt.

2. Inter duo praeſata mediaſtina duasque inter ſpinas dorſales, tertia cauea eiusdem longitudinis duabus prioribus interiacens conſpicua eſt, in qua illud ſingulare occurrit, quod ſepto careat transverſo verſusque abdomen aperta ſit cumque eo communicationem habeat. In ea, mirum dictu! ventriculus, inteſtinum duodenum, magna hepatis portio absque folliculo, lien, pancreas, omentum ſedem ſuam habere obſeruantur.

3. In duabus aliis caueis vitalia organa pari nu-

numero oculis ſiſtuntur, ac primo quidem Thymus vtrinque adeſt, dexter ſcilicet venae ſubclauiae, ſiniſter venae cauae incumbens. 2. Pericardium geminum ſeu bicapſulare, multam aquam citrinam continens. 3. Duo corda perfecta et inuiolata, vnum dextrorſum, alterum ſiniſtrorſum. 4. Pulmo vtrinque more ordinario conformatus. 5. Vaſa omnia gemina pro corde gemino, ac in corde quidem dextro ad eius dextrum ſinum duo vaſa exſtant, vnum venoſum, quod recta verſus inferiorem ventrem deſcendit, data ſolummodo dextra iugulari et ſubclauia, quae ad caput dextrum ſpectant: Alterum arterioſum ex quo poſtquam duo canales ad dextri pulmones vtrumque lobum tendentes egreſſi ſunt, arcus demum efformatur, qui tres e dorſo ramos carotidem ſcilicet ſiniſtram dextri capitis, ſubclauiam dextram, ac denique ramum cuſpidi proprium producens ſiniſtrorſum reflectitur aortamque mentitur.

In altero ſeu ſiniſtro corde, ad ſinum dextrum vena caua ſuperior in arcum flexa, e duobus ramis iugulares et ſubclauias efformantibus conſtans ſub oculos cadit, isque poſtea arcus venas ſiniſtras alterius corpuſculi producit. Iuxta praefatam venam, arteria magna ex eodem ſinu egreditur, quae duobus ramis ad ſiniſtrum pulmonem transmiſſis, formaque arcus aſſumta deorſum iuxta ſpinae ſiniſtrae ductum tendit, e cuius arcus dorſo hinc dextra, illinc ſiniſtra ſubclauia pullulat.

Totidem denique vaſa e ſiniſtro ſinu emergentia conſpicua ſunt, nimirum vena ad pulmonem ſpe-

ctans. 2. Arteria in tres ramos deſinens, quorum dexter cum ſubclauiam tum carotidem dextram in vſum ſupra memoratae cuſpidis gignit; Medius carotidem ſiniſtram, ſiniſter ſubclauiam ſiniſtram exhibet.

Supra vidimus, ventriculum cum inteſtino duodeno, magnaque hepatis portione, item lienem, pancreas, omentumque Thorace incluſa eſſe; Eo non obſtante, praefata viſcera in abdomine ſimiliter occurrunt, nimirum ventriculus cum liene, pancreate, omento ac hepate ambo hypochondria occupante, in quo duae veſiculae bilariae pauca bile admodum fluida imbutae conſpicuae ſunt. Hoc vno excepto, conditiones reliquae naturales apparent.

Renum contra difformitas ſtatusque praeternaturalis, item renum ſuccenturiatorum tam in hocce quam in Caſanenſi monſtro aliisque foetibus notata diſpoſitio, digna ſunt, vt oculis ſubiiciantur annotenturque: Nam, quod ad renes attinet ſuccenturiatos, non ſola magnitudo eorum, verum copia ſanguinis diluti imprimis conſpicua eſt, quam in ſe continent ac in modum receptaculi, in renum forte gratiam recipiunt, ſicuti de hac re aliquando ſententiam meam ſuppeditabo.

Loco bis gemini renis ſuccenturiati, duo ſolummodo inueniuntur, quorum cauitates, vti modo dixi, cruore fluido ac diluto diſtentae ſunt.

Pariter in numero renum, defectum obſeruare licet: Nam quum in hocce ſubiecto duplex ſpinae dorſalis dextra ſiniſtraque adſit, neceſſe eſt, vt ad vtram-

vtramque ſpinam duo renes in conſpectum veniant, qui ſimul ſumti numerum quaternarium efficiunt. Loco autem allegati numeri, in latere dextro ad externum quidem ſpinae latus, vnus duntaxat ren tuberoſus et rotundus iacet, e cuius media regione duo vreteres, qui facto breui itinere rurſus coeunt, producuntur, in altera e contra parte eiusdem ſpinae, ren penitus deficit. Super ſpinam oppoſitam longa ac ſemilunaris figurae maſſa, quae transuerſo ſitu vertebris lumbaribus incumbens, vtrumque ſpinae latus occupat, vicemque duorum renum ſuſtinet, conſpicua eſt, nihilque aliud eſt, quam vtriusque renis mutua connexio, ſicuti geminus vreter e concaua ac ſurſum ſpectante ſuperficie in vtraque extremitate oriundus indicare videtur. Duo autem praefati vreteres mox inuicem iunguntur ac ductum ſimplicem conficiunt, qui ad veſicam tendit.

Poſtremo quod ad notas ſexus attinet, eae virginem eſſe declarant, prout id partim ex vteri bene conformati praeſentia, partim ex ſignis exterioribus iudicare licet.

DE THERMOMETRIS ET EORVM EMENDATIONE DISSERTATIO

G. B. Bülffingeri.

1.

M. Ian. 1728 ANnus eſt, et quod excurrit, ex quo de Barometris commentati, nouam illis acceſſionem fecimus, ſeparandi grauitatis et caloris atmoſphaerici mixtos inter ſeſe effectus. Id nunc *vſui Thermoſcopico* applicabimus, ſimilem Thermoſcopiis officioſitatem praeſtituri; exhibendo ſcilicet methodos, quibus, opitulante Barometro, praeſertim noſtro, ad menſuram reuocari caloris in aerem effectus poſſunt.

2. Notum eſt, paſſim deſiderari ab eruditis *menſuram*, ſecundum quam definiri et replicari exacte intenſitas *caloris*, atque adeo comparari calor vnus ad alterum in ratione lineae rectae ad rectam poſſit. Quaeſitam illam a variis, ſed parum felici euentu, dolentes vulgo fatemur.

3. Neſcio autem, an *quaerendi modus* in culpa fuerit? Incubuerunt viri egregii huic curae, vt *gradum caloris fixum* definirent, cuius replicatione ceteros

teros deinde cognoſcerent. Talem ego nullum ſpero inuentum iri, caloremque ipſum in ſeſe ad menſuram reuocari poſſe non autumo.

4. Omnis mea ſpes redit *ad menſurandos* quosdam caloris *effectus*. Et hi quidem varii ſunt : ſed non omnes aeque commodi inſtituto. Optionem igitur facias neceſſe eſt, atque ad illos praecipue effectus attendas, qui et menſuris aptiores ſunt, et finibus menſurae propiores.

5. Equidem Thermometra *ordinarie* deſtinantur cognoſcendis effectibus frigoris aut caloris in atmoſphaeram. Conuenit igitur ſcopo machinae, vt variatio aeris a calore oriunda per illam indicetur, et definiatur.

6. Atque huic fini proximum fuit, includere vitro aerem, vt expandi tamen et comprimi a calore aut frigore poſſit. Id a *Drebbelio* factum nouimus, ea ratione, vt in tubo recuruo, duabus inſtructo phialis vitreis, altera concluſum aerem contineret, altera aperta mercurium, qui incarcerato aeri poſt auctum a calore elaterem cederet.

7. Qualis eo tempore fiebat machina, miſcebat illa *effectum grauitatis* Atmoſphaericae cum effectu *caloris*. Itaque multorum incurrit reprehenſiones, facile retundendas, vti ex ſequentibus patebit, ſi quis, parente mortuo, pupilli curam ſuſcepiſſet.

8. Dum vero id neglectum eſt, *Academici Florentini* aliam priori machinam ſubſtituerunt; liberam ab incommodo preſſionis Atmoſphaericae, quoniam

niam externo aeri aditum praecluſerunt ; ſed aliis ſubiectam incommodis, quae non omnia exprobrari vulgo ſolent.

9. Phialam tenui tubo iunctam, et partem tubi ipſius, ſpiritu vini colorato repleuerunt, et hermetice tubum ſigillarunt : longitudinemque tubuli numeris in ſuas partes diuiſerunt, zyphra ſignantes locum, quem ſpiritus attingit temperie aeris inter frigus et calorem interiecta.

10. Hic vtique multa incurrunt, quae ſcrupulum faciunt. *Arbitraria* eſt hactenus *diviſio* tubuli nec quisquam eſt, qui ſpondere auſit, receptam in partes aequales diuidendi methodum reſpondere proportioni caloris aut frigoris.

11. Quin imo, ſi quid coniectura aſſequi posſumus, praeſtaret vtique, diuiſiones quoad longitudinem tubuli inaequales admittere : easdemque inſtituere pro capacitate tubuli et phialae coniunctim. Ita ſaltim hoc obtineres, vt conferre liceret volumina ſpiritus expanſi et contracti.

12. Sed *non ideo ſtatim* inferri poſſet, calorem vnum eſſe ad alterum in ratione voluminum. Id experiundo diſcere oportet. Namque coniectatione potius contrarium mihi perſuadeam : ſi expanſio pendet a materia quadam interflua ſpiritui, vt vulgo credimus.

13. Tum vero etiam illud grande incommodum eſt, quod *ex ſuprema* tubi *parte* enaſcitur. Vis eſſe *vacuam* ab aere ? quod fieri poteſt, ſi adeo expandas aucto calore ſpiritum, vt tantum non attingat

ſummitatem tubuli in fiſtulam capillarem deſinentis, atque tum hermetice ſignes. Sed ita e ſpiritu refrigeraſcente auolabit fluidum internum, cui expanſio paſſim imputatur: minueturque incertum qua proportione expanſio.

14. *Vis aere* ordinario, vel paululum rarefacto *plenam* eſſe tubi partem a ſpiritu vacuam? Ita ſcil. antagoniſtas ſibi opponis, aerem et ſpiritum vini, vtrosque per calorem expandendos contrariis niſibus. Quis eo facto definiat ex data ſpiritus expanſione vim caloris, aut frigoris ex contractione?

15. Vt nihil dicam de *rarioribus* phaenomenis, quale illud eſt *Chr. Wolfio* memoratum in *Experim. Phyſic.* Tom. II. c. 5. §. 6. p. 156. ſeqq. Aerem frigoris vi e ſpiritu euolaſſe, et poſtmodum ſeſe effectui caloris in expanſione ſpiritus plurimum oppoſuiſſe.

16. Quae cum ita ſint, neſcio an non praeſtitiſſet, *medelam Drebbeliano* afferre Thermoſcopio, quam id penitus negligere prae Florentino. Et potuiſſet afferri, ſi cum Barometro iungi Drebbelianam contigiſſet machinam, leuiter immutatam; quin auſim dicere, eam hoc modo inſtructam Florentinis praeſtare plurimum; quoniam a vera graduum caloris menſura parum aberit.

17. *Eius* autem *rei hic ordo* eſt. 1. effectus caloris proximus in aerem eſt augmentum elateris, 2. aucti elateris effectus eſt expanſio voluminis, niſi impediatur, 3. expanditur autem aer eousque, donec, manente impedimento eodem, volumina ſunt

elateribus ſenſibiliter proportionalia. Atque hae ſunt hypotheſes vulgo cognitae et conceſſae.

18. *Ex illis conficitur* : 1. data aeris maſſa conſtanti, datoque impedimento expanſionis, et datis voluminibus aeris a calore expanſi vel a frigore contracti, inueniri poſſe rationem inter effectus caloris et frigoris in hunc datum aerem. Eo autem obtento, 2. tranſitus ex hoc aere concluſo ad externum libere fluitantem, etſi non ſit perfecte exploratus, longe tamen praeſtat illo ſaltu, quo ab aqua, vel ſpiritu vini concluſo ad liberum aerem transſilitur.

19. *Quaeritur* itaque *machina*, in qua 1. exponi poſſit calori atmoſphaerae conſtans aeris maſſa: in qua 2. expanſionis impedimentum vel idem ſit, vel ad datum aliquod conferri exacte poſſit: in qua 3. aer aut ad idem volumen reduci, aut diuerſa aeris volumina menſurari poſſint: denique in qua 4. tanto ſit ſtructurae ſimplicitas, vt concluſus in machina aer eaſdem cum externo mutationes quam proxime ſubeat.

20. *Primum*, *tertium* et *quartum* nihil difficultatis alunt. Poteſt data aeris maſſa multis modis includi vitreo tubulo, et mercurio mediante ſic contineri, vt conſtans maneat, et liberam tamen expanſionem exercere, et contractionem pati queat. *Secundum* difficilius eſt requiſitum, quod variis tamen praeſtari poſſe modis videtur.

Tab. IX. Fig. 1. 21. Sit tubus tenuis et phiala inſtructus, A B C D, directus aut recuruus, diuiſus in partes capacitate

pacitate aequales, et cum capacitate phialae comparatas. (*) Habeat aerem ex A in B, ſed in B b. mercurium: in b per c vſque ad D aerem cum atmoſphaera communicantem. Dico, ſi machinulam hanc horizontaliter collocatam Barometro meo adiungas, factum eſſe, quod quaeritur.

22. Id facile ſic intelligitur. Si eandem ſemper grauitatem atmoſphaera ſeruaret: impedimentum expanſionis, idem et conſtans foret; adeoque elater aeris concluſi, atque adeo effectus caloris atque frigoris in hunc aerem proportionalis volumini, cuius ex conſtructione menſura datur.

23. Sed quoniam Atmoſphaerae grauitas diuerſa eſt diuerſis temporibus, oportet *reducere* praeſentem quamcunque ad priorem, quae conſtructionis tempore, vel alio quocunque obtinuit. Id ope Barometri mei fieri poteſt, ſeparato caloris in Barometrum influxu. Itaque de vera atmoſphaerae grauitate conſtabit ſpectatori.

* Nequis in *construendi modo* haereat, dicam qua methodo fieri facilis diuiſio poſſit. Mihi quidem haec adhibita fuit. Impleui mercurio phialam totam et ſolam; immerſione fiſtulae capillaris apertae, et ipſius bullulae in mercurium, vel et ſuctione. Eo facto curaui, vt mercurius e bullula ſenſim deflueret in tubulum inclinatum ſine aere admixto. Obſeruata autem tubuli mercurio illo repleti longitudine obtinui ſpatium aequale capacitati bullulae. Si maior bullulae quam tubi capacitas fuerit, per ſe patet repetendam eſſe operationem. Hoc peracto admiſi paululum mercurii in extremitatem tubuli, et notaui longitudinem ſpatii, quod ea in parte occupabat. Inclinato deinceps tubo, et attentione adhibita, ne vel nimium promoueretur mercurius, vel aliquid eius adhaereret vitri lateribus, ſignaui ſpatia omnia, quae ſucceſſiue huic mercurii quantitati reſpondebant ad ipſam uſque bullulam. Jta de ſpatiis vbique aequalibus me certiorem feci, vt ſi vel maxime inaequalitates, curuedineſque aut aliae irregularitates tubo non deſint, nihil illae menſuram vitiare meam poſſint.

24. Hac obtenta ſic inferas: Vt *altitudo* mercurii praeſens ad praeteritam, ita *impedimentum* expanſionis praeſens, ad impedimentum praeteritum, ita etiam *volumen* aeris praeterito tempore obſeruatum, ad volumen eiuſdem aeris obſeruandum, ſi impedimentum praeſens defuiſſet. Atque iterum, vti hoc volumen praeterito tempore obſeruandum, ad volumen praeſens obſeruatum, ita elater temporis praeteriti ad elaterem praeſentem; habetur itaque proportio inter elaterem praeteritum & praeſentem, hoc eſt, inter effectum caloris praeteritum et praeſentem.

25. In Symbolis rem ita concipe. Sit, tempore *conſtructionis* machinae, elater aeris incluſi $=E$, grauitas atmoſphaerae $=A$. impedimentum expanſionis $=I$ volumen aeris $=V$. Tempore *obſervationis* conferendae elater $=e$, grauitas atmoſphaerae $=a$, impedimentum expanſionis $=i$, volumen aeris $=v$. Denique volumen tempore conſtructionis obſeruandum, ſi pro impedimento I fuiſſet i, ponatur $=w$.

26. Erit his poſitis

$$A : a = I : i = w : V$$

adeoque $w = \frac{V.A.}{a}$

Porro $E : e = w : v = \frac{V.A.}{a} : v.$ Hoc eſt,

$$E : e = V.A : v.a.$$

Hoc eſt, effectus caloris ſunt in ratione compoſita directa voluminum aeris, et grauitatis Atmoſphaerae.

27. Facilis eſt haec machina, et facilis computus.

putus. Neque impoſſibile foret, tabulam conſtruere, in qua numeri ſine calculo inueſtigari poſſent; ad modum tabulae Pythagoricae, ſic vt in columna horizontali altitudines A, a, in verticali Volumina V, v, collocarentur, et in cellulis augularibus facta V, A, *v.a.* Id vnusquisque pro ſua Voluminum diuiſione computabit, ſi velit.

28. Patet vero, rem omnem redire ad Thermoſcopium Drebbelianum *leuiter* immutatum, ſic vt ex verticali fiat tubus horizontalis. Si verticalem placeat ſeruare, nihilo res difficilior erit, modo altitudinem aut profunditatem mercurii in tubo ſupra aut infra libellam mercurii in vaſe, velis attendere, illam demere, et hanc addere grauitati Atmoſphaerae.

29. Id tamen fatendum eſt, in hoc caſu miſcere ſe illud, quicquid eſt, irregularitatis, quod ab *expanſione* ipſius *mercurii* per calorem facta oritur; quod tanti ab Eruditis quibusdam Gallis, praeſertim Amontonio, fieri videmus, vt ea de cauſa Barometra neget exacta eſſe, niſi eam expanſionis irregularitatem noris euitare aut corrigere.

30. Nec diffiteor hanc cauſſam officere etiam ingenioſo plane conſilio, quo *ex Barometro* quocunque *Thermometrum* facere exemplo docuit ſuo Anonymus Gallus A. 1710. Equidem id facile omnibus anteferri Thermoſcopiis mereretur, ſi ab hoc incommodo liberum praeſtari poſſet. Conf. Acta Erud. Lipſ. ad A. 1711. m. Iul. p. 320. et Comment. Acad. noſtrae ad. A. 1726. p. 320. §. 6.

31. Eidem obſtaculo etiam illud tribuo, quod *ſequens machina*, etſi aliquo ſenſu praeſtare videatur priori, eadem tamen haud paulo inferior ſit. Venerat in mentem, commodius fore inſtrumentum, ſi menſura capacitatis tubi aut phialae non opus habeat; Vt autem euitari illa poſſit, curandum eſſe, vt aer concluſus idem ſemper volumen occupet: quo in caſu vis expanſiua reſpondeat impedimento expanſionis.

32. Inſtruenda igitur eo modo machina, vt *impedimentum expanſionis augeri minuique* pro arbitrio poſſit, momento temporis: Hoc eſt, vt preſſioni atmoſphaerae per Barometrum cognitae, addi aut demi preſſio noua poſſit, eademque cognita et comparabilis preſſioni atmoſphaerae.

Fig. 2. 33. Id facile ſic obtineas. Iungatur tubo in phialam deſinenti ABC tubus alius CDE ad angulum acutum. Sit aeris in AB concluſi ea copia, vt in ſummo frigore et ſitu tubi ABC horizontali, non vltra AB comprimatur: ſpatium vero BCDE ſit mercurio repletum; et nota ſit altitudo FG. Erit impedimentum expanſionis in ſitu horizontali aequale altitudini mercurii FG vna cum altitudine eius in Barometro.

Fig. 3. 34. Rarefiat aer in AB, ſic vt occupet ſpatium AG incognitum, dico, eleuandum eſſe angulariter inſtrumentum, vt acquirat ſitum punctatum a b c d e. Erit altitudo mercurii maior priore FG: adeoque maior et cognita iterum preſſio, aequalis ſcil. altitudini mercurii, quae reſpondeat atmo-

ſphae-

ſphaerae et lineae fg; quae ſubinde maior et maior eſſe poteſt reſpectu FG, prout radius CE, *ce* maior eſt ratione CB, *cb*.

35. Quomodo fieri talis machina poſſit, facile cuiuis ſuccurrat. Poteſt tabulae verticali horizontalis, cui tubus incumbat, ſic iungi, vt haec rotari circa axem queat. Poteſt ſcala pollicum et linearum probe diuiſa et mobilis applicari altitudini FG, vel *fg* cuicunque in tabula verticali notata: vel circino capi altitudo, et ad ſcalam examinari immobilem.

36. Vtrique negotio ſeruiet diuiſio tabulae verticalis per lineas horizontales, et numeris deſignatas, vt intelligas, quam earum attingat punctum E, *e*, et ad quam pertingat punctum B, *b*: ita enim ſine menſura aut calculo habebitur diſtantia FG, *fg*.

37. Si velis ex angulo rem deſignare: Poteſt ex data radiorum CB, et CE differentia, datoque elevationis angulo computari altitudo FG, *fg*; et in verticali tabula ſic deſignari, vt a dato aliquo machinae puncto numeri queſiti demonſtrentur. Quae omnia ſunt longe facillima.

38. Poſſet etiam deprimi infra lineam horizontalem tubus CBA, ſi quando id frigoris intenſitas requireret: modo tubi capacitas non fuerit admodum ampla, quo in caſu metus foret, ne diffluente mercurio aliquid aeris e carcere ſuo erumperet. Itaque praeſtat eam aeris copiam et id punctum B ſeligere, quod in ſitu horizontali dato maximo frigore extra bullam A inter ABC cadat.

39.

39. Ne inter rotationem frangi tubulum ſuperiorem mercurio oneratum metuas, ſulci et tubulum et praecipue bullulam E brachio, cui incumbat bullula. Sic et de tubulo capillari in A non eſt quod metuas ab actione mercurii prementis. Comperi, tenuiſſima tubuli capillaris latera reſtitiſſe preſſioni, quae ter et amplius aequabat preſſionem atmoſphaerae integram.

40. Ita igitur bina dedimus inſtrumenta, quorum mea ſententia hoc meritum eſt, vt incertas hactenus thermoſcopii menſuras, ad eam perducant exactitudinem, quae Barometrorum eſt: a qua hucuſque plurimum abfuerunt. Si enim Barometro vtaris Simplici, nihil pateris incommodi praeter id vnum, quod ab expanſione ipſius mercurii per calorem oritur. §. 29. 30.

41. Poteſt tamen et hoc ipſum, ſi nolis, aut nequeas meo vti Barometro, euitari etiam in Simplici. Quid enim? Seruetur. Barometrum in loco temperato: oſtendet altitudinem mercurii ſine vitio ex calore orto. Thermometrum ſolum colloces eo in loco, cuius noſſe et metiri temperiem velis.

42. Ita ſcil. euitari in priori mea machina §. 21. ſeq incommodum poteſt, quod ab altera Anonymi Galli §. 30. ſeiungi nunquam, ſed corrigi fortaſſis Amontonianis aut aliis poteſt artificiis. In ſecunda autem mea §§. ſeqq. tanto minor erit huius incommodi effectus, quanto minor eſt altitudo FG, *fg*, quam ea, quae preſſioni Atmoſphaerae reſpondet.

43.

43. Cum iſthaec prima vice animum ſubirent, eademque amico indicarem, reſpondit, me eadem opera et Thermometrum conſtruere et *Manometrum.* Equidem de Manometro nihil cogitaueram: fecit tamen id moniti, vt animaduerterem, vulgaria *defectu* laborare Manometra. Sunt illa hiſce Thermometris ſimilia. Videamus, quo iure?

44. Ab initio certum eſt, in ſtructura priore §. 21. ſeqq. menſurari poſſe *denſitates* aeris *concluſi*; ſunt enim reciprocae voluminibus. Secundo autem loco *lubricus* eſt *tranſitus* a denſitate aeris concluſi ad denſitatem externi. Finge, aerem externum vaporibus inquinari pluribus, dum in eodem ſtatu Barometrum et Thermometrum vulgaria perſiſtant. Nihil noſtra mutabitur machina, quae tantum a preſſione aeris et calore eius afficitur. Nihil igitur concluſi in machina aeris denſitas mutabitur: ſed augebitur externi.

45. Pace igitur Virorum egregiorum dixero: Quoniam *humoribus trans vitrum* via non patet; et patet tamen *calori*: ideo ſeruire machinam pro Thermometris poſſe rectius, quam pro Manometris.

46. *Excipio* caſus tamen, quibus aut ſoli directo, aut igni machina exponitur: Cum enim certum ſit ad eundem ſolem aut ignem aliud corpus alio aptius eſſe ad recipiendum gradum caloris fortiorem: itaque fieri poteſt, vt ob calorem vitri maiorem, etiam incluſus vitro aer magis incaleſcat, quam circumfuſus exterior. Quare pro illis machinam com-

mendo caſibus, quo ipſius vitri calor ab aere circumfuſo oritur, et ad concluſum transfunditur.

47. Virtutis loco eſt, ſi machina ſeruiat comparandis *diuerſarum regionum* locis: Hunc enim disquiſitioni ſuae ſcopum praefixere, qui in calorem fixum inquiſiuerunt. Iam dixi, talem me nullum ſperare. Igitur in eo acquieſco, vt ope huius machinae fieri alia inter diuerſos obſeruatores communicatio poſſit, et commodior illa quam hactenus obtinuit.

48. Florentina ſi adhibeas Thermometra, fieri graduatio actualis debet, dum pro ſingulis quaſi calorum differentiis eidem temperiei bina exponuntur Thermometra. Id nimis vtique moleſtum eſt. Noſtra compraeſentiam poſtulant, ſed ſufficit, vt ſemel et in *vnica* aeris temperie comparentur. Obtento ſemel hoc communi proportionum termino conferri inuicem omnes aeris ſtatus poſſunt; vt facile intelligitur. Quodſi igitur cum cura fiant machinulae §. 21. deſcriptae, et in D ſigillentur hermetice, transmitti commodiſſime per orbem vniuerſum poſſunt; et vbi in locum obſeruationis futurae peruenerint, aperiri in D et facere officium ſuum.

49. Supereſt, vt moneam, an non operae pretium ſit *comparare* inuicem *plura* huiusmodi Thermometra eidem aeri expoſita, vt intelligatur, an omnino conſpirent menſurae? an pro diuerſa aeris mole? an pro diuerſitate temporis, quo ille concluditur? vel pro diuturnitate temporis, quo ille con-

cluſus ſeruatur ? an pro aliis eiusmodi circumſtantiis emergant menſurarum differentiae ? Nondum enim haec ſatis explorata eſſe vulgo conquerimur.

SVPPLEMENTVM
ad
Diſſertationem praecedentem.

50. Dum iſta relego, vt typis committantur, M. Mart. 1730.
nouus ſe animo luſus offert. Eum hic acceſſionis loco adiungam potius, quam vt ſpecialem illi commentationem impendam. Poteſt machina §§. 21. ſeqq. deſcripta, ſic adhiberi, vt ſequens ſoluat

Problema :

Facere inſtrumentum aliquod ſimpliciſſimum, quod et Barometrum ſit et Thermometrum : hoc eſt, cuius ope et grauitas aeris cognoſci poſſit et calor.

51. Nimirum *pro vſu Barometrico* notandum eſt, ſi mercurius in ſitu tubuli horizontali occupet ſpatium CD aliquot pollicum, eundem in ſitu verticali vno occupare ſpatium BC propius bullulae, et in altero ſpatium DE remotius a phiala.

52. Sit nunc ſpatium AB$=a$, AC$=b$, AD$=c$. Altitudo mercurii BC$=f$, CD$=g$, DE$=h$. et altitudo mercurii reſpondens grauitati Atmoſphaerae $=x$.

 Erit

Erit vis expanſiua aeris concluſi aequalis facto ex ſpatio in impedimentum expanſionis per §. 26. adeoque

$$a(x+f)=bx=c(x-h) \text{ vnde fit}$$

$$x=\frac{af}{b-a}=\frac{ch}{c-b}=\frac{af+ch}{c-a}$$

vel, ſi tubulus ſit cylindricus, adeoque $f=g=h$: erit

$$x=g\frac{a}{b-a}=g\frac{c}{c-b}=g\frac{c+a}{c-a}. \quad \text{Q. E. I.}$$

53. Obtenta autem preſſione Atmoſphaerae, *pro vſu Thermometrico* nihil aliud requiritur, praeter id, quod ſupra iam oſtendimus. Vis caloris expanſiua eſt vt factum ex ſpatio in impedimentum: Dicatur illa y: erit

$$y=ab\frac{f}{b-a}=bc\frac{h}{c-b}=ac\frac{f+h}{c-a}=b\frac{af+ch}{c-a}$$

et poſitis $f=g=h$, erit

$$y=ab\frac{g}{b-a}=bc\frac{g}{c-b}=ac\frac{2g}{c-a}=bg\frac{a+c}{c-a}. \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium.

54. Ope huius machinulae poſſumus *differentias caloris* comparare *cum pondere mercurii.* Exempli gratia d. $\frac{1}{12}$ Mart. 1730. cum intenſo frigore aer rigebat, deprehendi ſpatium b in libero aere $=50$. Sed in hypocauſto calefacto $=54$. Cum mox erigeretur tubus verticaliter, deprehendi ſpatium $a=50$, et altitudinem mercurii f 3. poll. Igitur altitudo mercurii 3. poll. aequipollebat preſſione ſua differentiae actionis expanſivae caloris in aere libero et in hypocauſto.

55. Patet autem, ſi ſtatus praeſens *calidior* comparandus ſit cum praeterito frigidiore, tubum ſic erigendum eſſe, vt bullula imum teneat. Sin *frigidior* praeſens cum calidiore praeterito, ſic vertendum eſſe tubulum, vt ſummum bullula occupet.

56.

56. Si maior eſt compreſſio vel expanſio aeris concluſi a mercurio veniens in ſitu verticali, quam requiritur ad ſtatum priſtinum, quocum conſerri praeſens compreſſio aut expanſio debet: *ſucceſſiue eleuari* tubulus poteſt, donec deſideratus obtineatur compreſſionis vel expanſionis gradus. Atque tum ex angulo eleuationis intelligitur altitudo mercurii verticalis, computo, vel per machinam ad eum finem aptatam.

57. Sin denique *mercurii pondus non ſufficiat* ad praeſtandam compreſſionem vel expanſionem quaeſitam: res facili formula inueſtigari poteſt. Exempli gratia: Si aer in ſitu horizontali occuparet ſpatium b, et in verticali ſpatium $a+p$, cum deberet comprimi in ſpatium a: quaeri poteſt altitudo mercurii adhuc addenda, vt haec compreſſio ſuccedat. Sit illa $=z$ et altitudo mercurii in tubo $=f$ altitudo autem eiusdem reſpondens preſſioni atmoſphaerae $=G$ erit:

$$b \times G = (a+p)\,(G+f) = a\,(G+f+z),$$ vnde fit

$$z = \frac{bG - aG - af}{f} = p\,\frac{G+f}{a}$$

58. Sin mercurius horizontaliter poſitus relinquat aeri incluſo ſpatium b, et tubo inuerſo ita, vt bullula ſummum teneat, aer occupet ſpatium $c-q$, cum deberet ex ſcopo comparationis amplius expandi, donec ſpatium eſſet c. Sit altitudo mercurii addenda $=t$: et, caeteris vt antea poſitis, habebitur:

$$b \times G = (c-q)\,(G-f) = c \times (G-f-t)$$ vnde fit

$$t = \frac{cG - bG - cf}{c} = q\,\frac{G-f}{c}$$

Scholium.

59. De *meritis* huius *machinae* ſic ſtatuo. Illam in vſu Barometrico ordinariis et ſimplicibus Barometris non eſſe praeferendam: Sed in Thermometrico praeſtare Thermoſcopiis vulgaribus. Hoc poſtremum patet ex ſuperiori diſſertatione; cui omnino hoc commode accedit, quod, ſi neceſſum fuerit, inſtructa hoc modo machina, ſupplere vicem Barometri ſibi coniungendi valeat.

60. Barometris in eo concedit machina, quoniam calculo opus habet, licet facili et breui, concedit etiam, quod obſeruatione duplici opus habet, et a calore eius, qui obſeruat, facilem patitur mutationem.

61. Quoad *ſenſibilitatem* differentiae preſſionum atmoſphaerae, non facile melior eſt vulgari Barometro, niſi tubum adhibeas praelongum. Id in exemplo patebit. Sit altitudo mercurii in tubo incluſi 6. poll. Capacitas bullulae ea, quae reſpondeat capacitati tubi 50 poll. longi. Sit ſpatium 6 in obſeruatione noſtra $=$ 71 poll. Si Atmoſphaera reſpondeat preſſioni mercurii 30 poll. alti, fiet $a=60$ et $c=90$. Sin atmoſphaerae minor preſſio fuerit, aequipollens ſolum 28 poll. mercurii: erit $a=59\frac{4}{17}$ et $c=91\frac{8}{9}$ adeoque tota differentia $c-a=$ 30 poll. in primo caſu, et in ſecundo $=32\frac{1}{2}$ quod parum ſuperat ſenſibilitatem Barometri ipſius ordinarii.

62. Neque de remedio anxius ſum, quoniam ſpeculationi potius quam vſui hancce machinulam de-

deſtinaui. Illud tamen notare iuuat: In ſitu machinae horizontali *frictionum* eſſe aliquod momentum. Quapropter, ne ea res etiam thermometrico fini officiat, duplex illi remedium placet opponere.

63. Si haereas, an debito conſiſtat loco mercurius in tubo horizontaliter poſito: attendes inclinando tubum et reclinando, in quam partem mercurius iterum horizontaliter repoſitus *conatum* progrediendi exerceat. Si in nullam, bene eſt.

64. Similiter attendes, ſi placet, an in altero extremo terminetur *conuexa ſuperficie*, et in altero caua. Tum vero promouebis in eam partem, quam conuexa reſpicit extremitas tamdiu, donec ſuperficie terminetur ad ſenſum plana. Plana autem erit in confinio eorum ſituum, quorum alter convexam praeſtat, alter concauam.

65. Ceterum id me non monente intelligitur, neceſſum eſſe, vt easdem obſeruator *cautelas* adhibeat circa hanc machinam, quas Drebbeliana et Florentina poſtulant Thermoſcopia: Vt vel muniat phialam cum tubo ſuo contra halitum et attactum, vel ab emittendo verſus machinam ſpiritu tantiſper abſtineat.

DIS-

D. B. I. F.
DISSERTATIONIS
DE ACTIONE FLVIDORVM IN CORPORA SOLIDA
ET MOTV SOLIDORVM IN FLVIDIS
CONTINVATIO

Conſ. Comm. Tom. II. p. 304. et ſeqq.

Pars Quinta.

De motu Corporum horizontali in mediis reſiſtentibus perſecte fluidis.

1.

Menſ. Oct. 1727.

POſtquam motum corporum verticalem tum aſcendentem tum deſcendentem in mediis reſiſtentibus ita pertractauimus, vt vbique menſuras abſolutas ſiue ſpatiorum, ſiue temporum ſiue etiam velocitatum ex ſufficientibus datis per regulas noſtras inuenire liceat; Poſtquam praeſertim in parte quarta (reliqua enim faciliora ſunt) docuimus occaſione experimentorum de globis ex tormentis bellicis exploſis ſumtorum methodum, qua ex ſolo tempore in aſcenſum deſcenſumque ſimul inſumto inueniri poſſit 1) *tempus quod in aſcenſum ſeorſim tum etiam in deſcenſum impenditur*, 2) *altitudo ad quam globus peruenit*, et 3) *altitudo ad quam globus eadem vi exploſus in vacuo aſcendere poſſit* &c. Poſtquam, inquam, haec ita ſatis prolixe expoſui-

poſuimus, nunc quaedam etiam adiiciemus de motu corporum horizontali in mediis reſiſtentibus.

2. Vtemur menſuris et denominationibus iisdem, quibus in Tomo ſuperiori: velocitatem v menſurabimus ex numero pedum quos mobile motu vniformi tempore vnius minuti ſecundi perficere poteſt: Reſiſtentiam (quam ceu pro mediis reſiſtentibus perfecte fluidis ponimus proportionalem quadratis velocitatum) deſignabimus per nvv. Demonſtrauimus autem in Tom. II. p. 324. quod poſito pondere fluidae maſſae globo moto aequalis b, ſumtaque ratione, quae eſt inter menſuram vnius pedis Anglici et diametrum globi vt 1 ad m, ſit $n = \frac{27b}{2320m}$, vel $n = \frac{3b}{16m} \times \frac{1}{16\frac{1}{9}}$, qui numerus $16\frac{1}{9}$ aſſumtus fuit pro ſpatio, quod vocabimus α, et quod percurritur a corpore graui ex quiete libere cadente intra minutum ſecundum. Sic igitur aſſumtis hiſce menſuris erit ponendum $n = \frac{3b}{16m\alpha}$.

3. Praeterea, cum dicimus incrementa vel decrementa velocitatum in omni motu proportionalia eſſe vi ſollicitanti vel retardanti ductae in tempuſculum, id eſt, cum ponimus $\pm dv = \gamma p dt$, vbi γ eſt numerus conſtans, p exprimit preſſionem et dt elementum temporis; fieri non poteſt, vt numerus γ eruatur, niſi ab aliquo exemplo a natura deſumto. Quod cum ita ſit huius exempli loco conſiderabimus motum corporum vi naturali grauitatis a quiete libere cadentium, quem talem eſſe nouimus, vt qui tempore vnius minuti ſecundi generatur, poſ-

ſit celeritate ſua vniformi eodem tempore abſoluere ſpatium 2α($32\frac{2}{9}$ ped. Angl.): Vnde ſi iam ponatur actio grauitatis in dato corpore ſeu pondus illius in vacuo $=a$ et rurſus aequatio fiat $dv=\gamma adt$, ſiue integrata $v=\gamma at$, eruemus valorem numeri conſtantis γ, ſi in praedicto caſu particulari ponatur $v=$ (numero pedum quos mobile velocitate ſua vniformi tempore vnius minuti ſecundi perficere valet $=$) 2α et $t=$ (numero minutorum ſecundorum, quo iſta velocitas generatur $=$) 1: ſic habetur $2\alpha=\gamma a$, ſeu $\gamma=\frac{2\alpha}{a}$, qui valor in omni aequatione, qua motum aliquem, quiscunque fuerit, definire animus eſt, ſubſtituendus erit.

4. Sit vero iam motus horizontalis in medio ad hypotheſin noſtram reſiſtente poſt datum tempus reſiduus, indagandus, huncque in finem ponamus velocitatem initialem q, velocitatem poſt datum tempus t reſiduam v; erit vis in eodem temporis puncto retardans $=nvv$, igitur aequatio generalis ($dv=\gamma pdt$), hic eſt $-dv=\frac{2\alpha}{a}\times nvvdt$, ſeu poſito pro n valore eius $\frac{3b}{16m\alpha}$ (conf. §. 2.) ſit $-dv=\frac{3bvvdt}{8am}$, ſeu $\frac{-dv}{vv}=\frac{3bdt}{8am}$, quae integrata dat $\frac{1}{v}-\frac{1}{q}=\frac{3bt}{8am}$: Vnde denique $\frac{v}{q}=\frac{8am}{8am+3bt}$, vbi per a intelligatur pondus globi in vacuo et per b pondus fluidi eiusdem cum globo molis, ſeu vbi $\frac{a}{b}$ exprimat rationem inter grauitates ſpecificas corporis et fluidi: tempus autem quo velocitas datum gradum attingit tali exprimitur aequatione $t=\frac{8amq-8amv}{3bv}$.

5. Apparet hinc in motu horizontali nihil reſpi-

ſpiciendum eſſe ad abſolutam grauitatis actionem, quia littera α ex computo euanuit. Secus rem ſe habere in motibus non horizontalibus apparet ex iis quae in ſuperiori Tomo habentur.

6. Exemplum capiamus iſtarum aequationum a planeta aliquo: terram v. gr. conſideremus circa ſolem motam, eandemque moueri fingamus in medio reſiſtente, cuius grauitas ſpecifica ſit ter millies millenis vicibus minor grauitate ſpecifica totius globi viſuri quantam motus diminutionem intra bis mille annos ſeu 63113900000 ſcrupula temporis ſecunda exinde acceptura ſit: diametro terrae demus 41870000 pedes Angl. quibus ſic poſitis, erit $a = 3000000$; $b = 1$; $m = 41870000$ et $t = 63113900000$ o, ergo $\frac{v}{q} = (\frac{8am}{8am + 3bt} =) \frac{100488000000}{100506093417}$ ex quo concludere licet velocitatem vna fere quinquies milleſima trecenteſima parte decreſcere debuiſſe (ſepoſita tamen conſideratione eius, quod diminutio velocitatis planetam ad centrum virium ſeu ſolem appropinquare cum aliquo velocitatis incremento faciat) quod decrementum quoniam Aſtronomos fugere non potuiſſet, ſtatuendum eſt, quod dixi p. 318. Tom. II. materiam planetas ambientem eorundemque motui reſiſtentem, ſi quieſcat, minimum 3000000 vicibus eſſe rariorem, quam eſt materia planetae, quod exemplo terrae nunc explicuimus.

7. Atque hoc modo cognoſci ſemper poterit velocitas globi reſidua ex tempore motus: Verum ſi eadem velocitas quaerenda ſit ex ſpatio percurſo,

alio non opus eſt, quam vt in aequatione fundamentali paragraphi quarti ($-dv = \frac{3bvvdt}{8am}$) ſubſtituatur ds loco vdt; hinc oritur $-dv = \frac{3bvds}{8am}$ vel $-\frac{dv}{v} = \frac{3bds}{8am}$, atque peracta debita integratione, $\frac{s}{m} = \frac{8a}{3b}$: log. $\frac{q}{v}$, quae poſterior aequatio indicat quot diametros globus percurrere poſſit dum ad datum velocitatis gradum reducitur.

8. Sit v. gr. fluidum eiusdem cum globo grauitatis ſpecificae nempe $a = b$, propoſitumque fuerit indagare, quotnam diametros globus perficiat dum dimidium velocitatis perdit; erit $\frac{q}{v} = 2$, atque ſic $\frac{s}{m} = \frac{8}{3}$ log. $2 = 1.848$. id eſt, globus motus in medio reſiſtente perfecte fluido, cum quo habet communem grauitatem ſpecificam, dimidium velocitatis initialis partem amittit, dum ſpatium vnius diametri cum octingentis octoginta quatuor milleſimis partibus percurrit: Dicit autem Neutonus in Princ. Math. Phil. nat. edit. 3. Coroll. 4. p. 343. *Globus in fluido compreſſo quieſcente eiusdem ſecum denſitatis mouendo dimidium motus ſui partem prius amittit quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit*; quae ab noſtris minime recedunt. Fluidum vero compreſſum vult Neutonus, quia a compreſſione oritur particularum contiguitas, quae facit vt reſiſtentia fluidorum dimidia ſit eius quae foret ſi particulae paruis interſtitiis eſſent poſitae prouti demonſtraui in Tom. II. Comm. p. 308. §. V. atque hoc in caſu valor ipſius n §. 2. exhibitus duplicandus eſſet aut etiam quadruplicandus, ſi particulae fluidi conſide-

ſiderantur vt perfecte elaſticae vid. loc. cit. §. 11. vnde aequatio finalis haec eſſet $\frac{s}{m} = \frac{4a}{3b} : \log. \frac{q}{v}$ aut etiam haec $\frac{s}{m} = \frac{2a}{3b} : \log. \frac{q}{v}$, prouti in fluido particulae non contiguae molles vel elaſticae finguntur. Haec ideo moneo, ne ſi quis forte incidat in Diſſertationem Paternam A. 1727 Pariſiis editam *de legibus motuum* attentoque animo perlegat quae ibi habentur de colliſione corporis in multa alia corpora, ex quibus methodo plane noua et a noſtra diuerſa, communibus tamen principiis ſuperinſtructa, etiam deducitur natura motus corporum in medio reſiſtente, ne inquam, mea a Paternis diſſentire putet, prouti prima fronte ex exemplis ab vtraque theoria inter ſe collatis facile iudicauerit. Sic v. gr. Pater dicit p. 70 de globo plumbeo in aere moto (grauitates ſpecificas plumbi et aeris facit vt 8000 ad 1) ſuper plano horizontali, *fore vt dimidium velocitatis initialis perdiderit, cum propè* 3700 *diametros percurrerit.* Nos vero ſi in aequatione $\frac{s}{m} = \frac{8a}{3b} : \log. \frac{q}{v}$ ponamus pro iſto caſu $\frac{a}{b} = 8000$, $\frac{q}{v} = 2$. fit $\frac{s}{m} =$ (proxime) 14800, qui nempe numerus praeciſe quadruplus eſt prioris, quod ex hoc oritur, quia Pater aerem conſiderauit vt fluidum compoſitum ex particulis perfecta elaſticitate praeditis, et paruis interſtitiis a ſe inuicem ſeparatis (*compoſé*, ſic dicit p. 69. *de molecules douées d'une parfaite elaſticité et ſeparées les unes des autres par de petits interſtices*). Hinc reſiſtentia quadruplicata et ſpatium a globo percurrendum ad quartam vſque partem diminutum, quod idem

 dem

dem dicendum de reliquis, quae Pater allegat, exemplis, quae ſic, ſi ad diuerſitatem hypotheſium reſpicias, cum noſtris ad amuſſim conſentire intelligis. Hicque conſenſus egregie confirmat regulas, quas Pater dedit, nouas de motu corporis a percusſione plurium corporum.

9. Si in aequationibus §. §. 4. et 7. ponatur $v=0$, fit tam tempus quam ſpatium infinitum, ſic vt nunquam pro noſtra reſiſtentiarum hypotheſi omnis ceſſet motus, iſtoque tempore infinito ſpatium etiam infinitum abſoluatur. Erunt fortaſſe quibus ſuperfluum videatur poſterius hoc monuiſſe quandoquidem tempore motus infinito non poſſit non ſpatium percurri infinitum facile quis cogitare poſſit: caſus tamen dantur in quibus res ſecus ſe habet, nempe cum reſiſtentiae proportionales ponuntur velocitatum dignitati, quae ſit maior vnitate vel eidem aequalis ſed minor binario. Quod vt percipiatur, ponemus reſiſtentias proportionales generaliter v^p, et inueniemus retentis litteris §. 4. aſſumtaque littera A pro conſtante $t=\frac{A}{1-p}\times(q^{1-p}-v^{1-p})$ in qua ſi ponatur $v=0$, prodit $t=\frac{A}{1-p}\times(q^{1-p}-0^{1-p})$, quae quantitas manifeſte eſt finita, ſi p eſt minor vnitate: At vero cum p praeciſe eſt aequalis vnitati quaeri poteſt num tempus ſit finitum an infinitum, ad quod reſpondeo eſſe quidem infinitum, ſed tale tamen, quod cum nullo comparari poſſit infinito, quocunque ſigno radicali id ſit affectum; minus enim eſt

quam

quam $\sqrt[n]{\infty}$, quantuscunque fuerit numerus n aſſignabilis: fit nempe $t = \frac{A}{0}(1 - \frac{1}{\infty}{}^{0}) = \log. \infty$.

Similiter aequatio §. 7. generalis reddita ſi per B intelligatur numerus conſtans haec fit $s = \frac{B}{2-p} \times (q^{2-p} - v^{2-p})$ et poſita $v = o$, eſt $s = \frac{B}{2-p} \times (q^{2-p} - o^{2-p})$, ergo ſpatium finitum percurritur, ſi p eſt minor binario, at infinitum cum p vel eſt aequalis vel maior binario. Facta iam comparatione inter valores ſpatiorum et temporum, ſequitur, quod affirmaui, tempus motus ſine fine durare, ſpatium tamen finitum durante toto motu percurri, ſi p eſt vel aequalis vnitati vel maior vnitate ſed minor binario.

Pars Sexta

Quae continet commentationes generales de reſiſtentia fluidorum.

I.

HActenus fluidorum conſiderauimus reſiſtentiam vnice illam, quae ab eiusdem particularum inertia oriri poſſit; et ſane ſola conſiderari meretur, cum motus non ſunt valde tardi, in fluidis vt aqua vel aere parum tenacibus, quod plurima teſtantur experimenta. At vero in motibus lentiſſimis alia ſe manifeſtat inſuper reſiſtentia, quae alteram ſaepe aequare, imo et ſuperare poteſt: Hoc ipſum autem probat, quod ſi haec altera reſiſtentiae ſpecies a velocitate corporis pendet, non poſſit non parua eſ-

ſe velocitatis dignitas , cui reſiſtentia iſta ponitur proportionalis. Si enim ad inſtar prioris reſiſtentiae eſſet quadrato velocitatis proportionalis, non magis ſe manifeſtaret in motibus velocioribus quam tardioribus , et ſi dignitas altior aſſumatur contrarium quam quod dictum eſt contingere vides.

2. Hoc igitur reſpectu non male dicitur altera reſiſtentia a fluidorum tenacitate oriunda velocitatibus corporum ſimpliciter proportionalis ; idque etiam ſtatuiſſe videtur Neutonus priusquam de tertia *Princ. Phil.* editione cogitaret, quae fortaſſe opinio fecit , vt theoremata plurima *de motu corporum in mediis*, *quae partim in ſimplici et partim in duplicata velocitatum ratione reſiſtant* operi inſereret. At difficile eſt cauſam vel modum reſiſtentiae excogitare , quae ſit velocitati corporis proportionata, hincque ipſe Neutonus iſtam hypotheſin mathematicam potius quam naturalem dicit in vltima editione eiusdem operis pag. 239. qua relicta ponit pag. 274. reſiſtentiam , de qua dicimus , temporum momentis proportionalem, id eſt, conſtanter eandem in eodem corpore eodemque fluido nullo habito ad velocitates reſpectu.

3. Videtur altera haec hypotheſis priori magis naturae conuenire, quantum ad cauſam phyſicam reſiſtentiae quae fluidorum tenacitati debetur. Licet enim rem hunc in modum conſiderare , corpus nempe motum perpetuo a guttulis fluidi circumfluis diuelli et , quia numerus harum guttularum vbique idem ſit, qualiscunque fuerit corporis velocitas, reſiſten-

ſiſtentiam quoque eandem vbique eſſe: huc etiam redit talis explicatio. Priusquam gutta pendula in duas diſpeſcitur partes, videmus illam totam elongari, rupturae autem momento vtrumque dimidium citiſſime in globulos ſe reſtituere. Igitur cum corpus a guttulis circumfluis ſibi adhaerentibus diuellitur continue filamenta fluidi ceu totidem quaſi elaſtra extendit ſatisque extenſa rumpit, vnde in hoc motu vis viua perditur in tenſionem elaſtrulorum minimorum impenſa, quae ceteris paribus ſpatiolis deſcriptis proportionalis eſt. Talis adeoque eſt reſiſtentia, vt decrementa vis viuae ſint elementis ſpatiorum proportionalia, qui effectus rurſus indicat, eſſe reſiſtentiam ad inſtar actionis grauitatis conſtantem ſed directioni motus oppoſitam. Eſt haec reſiſtentiae idea eo magis verae ſimilis, quod corpora oleo illinita citius mouentur quam non illinita, quia ſcilicet in illis guttulae aqueae non ita facile ſuperficiei adhaerent, atque adeo minori numero adſunt diuellendae.

4. Cum proſequimur hanc hypotheſin, percipimus diuerſam fore reſiſtentiam tenacitatis manentibus fluido, figura, grauitate, magnitudine et velocitate corporis, mutata ſolum corporis materia, quia fluidi particulae aliis corporibus facilius adhaerent aliis difficilius: numeri igitur conſtantes per calculum erui non poſſunt, prouti in caſu alterius reſiſtentiae quae inertiae particularum debetur, niſi et fluidum et materia corporis permaneant eadem, atque tum etiam experimentum aliquod re-

quiritur, quod reliquis baſis ſit, et cuius ope actio reſiſtentiae cum actione grauitatis poſſit comparari.

5. Manentibus itaque tum fluido, tum materia corporum motorum coniicere eſt, reſiſtentiam eſſe proxime in ratione ſuperficierum iſtorum corporum, nullo habito reſpectu ad figuram, cuius rei fundamentum quilibet videt: ergo in globis diuerſarum magnitudinum erunt reſiſtentiae in quadrata ratione diametrorum.

6. Si vera ſit praememorata iſtius reſiſtentiae hypotheſis, nihil commodius accidere potuiſſet computis Geometricis: quandoquidem nihil fere excogitari poſſit, quod alterius huius reſiſtentiae conſideratio reddat difficilius, dum omnis alia hypotheſis, quae velocitatum rationem habet, geometriae limites, vel potius Geometrarum vires in motibus curuilineis facile transgrediatur: Vtrumque poſſet exemplis illuſtrari, quia vero hactenus abſtinui a conſideratione motuum curuilineorum, quam in proximam occaſionem reſeruo, de his nihil ſuperaddam. Non aliter quam phyſice argumentum praeſens percurrere conſtitui, idque breuiter: conſiderabimus itaque caſum ſaltem ſimpliciſſimum, nempe cum globus in medio leviori a quiete verticaliter deſcendit, vt facta comparatione experimenta inter et calculum appareat, quousque poſitiones cum rei natura conueniant. Fatendum quidem eſt, aptiora huic inſtituto quodammodo eſſe experimenta ab oſcillationibus corporum in medio

dio reſiſtente deſumta, ſed, vt dixi, hanc theoriam in proximam occaſionem differo.

7. Propoſitum cum eſt aequationem inuenire inter deſcenſum globi duplicem reſiſtentiam ſuperantis et tempus deſcenſu inſumtum, aliud plane nihil faciendum eſt, quam quod in ſuperiori Tomo pag. 320. et ſeqq. iam prolixe ſatis actum fuit, mutato ſolum valore litterae a pondus corporis in fluido denotantis; c[illegible]m enim tam grauitas corporis quam reſiſtentia tenacitatis vniformiter agant, poſterior autem priori ſit contraria, ſic rem concipere licet, vt ſi grauitas tantum eſſet diminuta quantum tenacitas fluidi reſiſtit. Poſito igitur pondus corporis in fluido eſſe A, reſiſtentiam vero tenacitatis α, conſiderabimus abeſſe omnem tenacitatis reſiſtentiam, pondus vero corporis in fluido eſſe $A-\alpha$: Sic ſi intelligamus per a quod hic eſt $A-\alpha$, valebit in praeſenti caſu quodcunque erutum fuit in allegatis paginis. Invenimus autem pag. 324. hanc aequationem inter tempus t et ſpatium s

$$t=[\log.(c^{\frac{27bs}{2320m}}+\sqrt{(c^{\frac{27bs}{1160m}}-1)})]:\sqrt{\frac{27ab}{2320m}},$$

in qua t exprimatur in minutis ſecundis, s in pedibus Anglicis, c denotet numerum, cuius logarithmus eſt vnitas, $\frac{1}{m}$ exprimat rationem pedis Anglici ad diametrum globi; a ſit differentia inter pondus globi in fluido et reſiſtentiam tenacitatis, nempe $a=A-\alpha$ et $b=$ ponderi maſſae fluidi globo aequalis. Iſti aequationi proxime aequiualet, in motibus tardioribus, quos hic ſolos conſideramus, ſine

vllo ſenſibili errore haec altera aequatio, qua ſola deinceps vtemur.

$$t = \left(\frac{27bs}{2320m} + \log. 2.\right) : \sqrt{\frac{27cb}{2320m}}.$$

Denique demonſtratum fuit pag. 325. in calculis numericis ponendum eſſe $a = 32\frac{2}{9} - b$; quo facto erit

$$t = \left(\frac{27bs}{2320m} + \log. 2.\right) : \sqrt{\frac{870cb - 27bb}{2320m}}$$

Fuerit nunc grauitas ſpecifica globi in vacuo ad gravitatem ſpecificam fluidi, vt q ad 1, erit $A + b. b :: q. 1$ vel (quia $A - \alpha = a = 32\frac{2}{9} - b$, id eſt, $A = 32\frac{2}{9} + \alpha - b$) erit $32\frac{2}{9} + \alpha. b :: q. 1$; vnde habetur $b = \frac{290 + 9\alpha}{9q}$; ſubſtitutoque hoc valore oritur aequatio finalis $t = \left(\frac{870s + 27\alpha s}{2320mq} + \log. 2\right)$:

$$\sqrt{\frac{252300q + 7830\alpha q - 243\alpha\alpha - 15660\alpha - 252300}{20880mqq}}.$$

8. Per praecedentem aequationem ad calculum reuocari poteſt quantum temporis requiratur, vt globus certae diametri in medio cuius grauitas ſpecifica ratione globi datur per datum ſpatium deſcendat, modo innoteſcat valor litterae α; cognoſcetur autem ex vnico experimento, quod reliquis baſis erit, et quod adeo accuratiſſime eſt inſtituendum.

Equidem Neutonus plurima recenſet experimenta a ſe inſtituta de globis cereis particulas plumbi continentibus, quae videre eſt in Princ. Math. Edit. 3. pag. 346. et ſeqq. Poſtquam autem maximam partem calculo ſubieciſſem, deprehendi haec experimenta plane conuenire cum aequationibus in ſuperiori Tomo pag. 324. exhibitis, ita vt tenacitatis reſiſtentiae nulla ſit fere habenda ratio, et ne tunc quidem cum motus corporis ſatis eſſet lentus, veluti in

in experimento octauo. Vnicum eſt, quod tenacitatem ſenſibilem arguit, in quo motus erat lentiſſimus, nempe experimentum, quod Neutono eſt tertium, quodqué extat pagina 347. „Globi tres,„ aequales quorum pondera ſeorſim erant 121 gr. „ in aere et 1 gr. in aqua ſucceſſiue demittebantur „ et cadebant in aqua temporibus 46″ 47″ et 50″„ deſcribentes altitudinem digitorum 112. „

Seligemus hoc experimentum pro determinando valore litterae α; Quoniam autem in tribus globis diuerſus fuit ſucceſſus, caſum primum conſiderabimus, quo globus tempore quadraginta ſex minutorum ſecundorum delapſus fuit; nam cauſae multae ſunt *accidentales*, quae corpus retardare, nullae praeter impulſum, quae accelerare poſſint.

In hoc experimentorum caſu eſt $t = 46$; $s = 9\frac{1}{3}$; $m = 0.0808$; $q = 1.00832$. qui valores poſteriores ſi ſubſtituantur in noſtra aequatione modo inuenta et animus abſtrahatur a reſiſtentia tenacitatis, poſito ſcil. $\alpha = 0$, prodit $t = 39\frac{1}{2}$; ſic vt globus deſcendere debuiſſet tempore triginta nouem minutorum ſecundorum cum dimidio; quia autem inſumſiſſe quadraginta ſex repertum fuit, indicium eſt, obſtàculo notabili motui fuiſſe tenacitatem, quod pariter in omnibus aliis experimentis de motu tardiſſimo ſumtis ſemper deprehenditur: inuenitur autem tempori quadraginta ſex minutorum ſecundorum ſatisfieri, ſi ſumatur proxime $\alpha = 0.071$.

9. Poſtquam valorem litterae α pro iſto experimento particulari inuenimus, poterit idem valor pro omni globo, cuius ſuperficies cera obducta eſt

 et

et cuius diameter eſt $=m$, determinari, ſi modo tenacitatis reſiſtentia ſit in ratione quadrata diametrorum: erit ſcil. generaliter $a = \frac{mm}{(0.0808.)^2} \times 0,071 =$ $10,88mm$.

10. Si iam alia extarent huiusmodi experimenta de globis cereis lentiſſime deſcendentibus ſumta, experiri daretur, quantum hypotheſis conueniat cum vera tenacitatis reſiſtentia. Diſplicet autem in hac re vtut ſatis caeterum probabili, quod grauitas globi ſuperare poſſit ſat notabiliter grauitatem ſpecificam fluidi, dum globus plane non deſcendere deberet ſed ſuſpenſus in aqua haerere, quale quid nunquam obſeruatum fuiſſe puto, et quod tamen ſecundum aequationem vltimam §. 7. ſuccedere deberet, ſtatim atque denominator euaneſcere incipit.

11. Vt vero intelligatur, quanta ſit reſiſtentia tenacitatis, quae vi praememorati experimenti inuenta fuit, ratione ponderis globi in aqua; quaerendus eſt valor A per aequationes, quae circa finem §. 7. datae fuerunt, nempe $A = 32\frac{2}{9} + a - b$, et $b = \frac{290 + 9a}{9q}$; ita enim inuenitur $A = 0,2669$. hoc igitur in caſu reperitur reſiſtentia tenacitatis ad pondus quod globus habet ſub fluido, vt 71 ad 266, id eſt, maior quam quarta pars ponderis; atque adeo ſi globus ſimilis ſub aqua pondus tantum haberet quartae grani partis, is non deſcendere deberet vi hypotheſeos, hac in parte parum commendabilis.

An

An vero et quousque experimento ſit fidendum neſcio; difficile eſt pondera minima accurate ſumere, et multa alia ſunt, quae faciunt, vt experimenta in motibus lentiſſimis minus ſint tuta. Sed quantulicunque fuerit valoris reſiſtentia deſignata per α, ſemper tamen inde ſequitur corpora dari aqua ſpecifice non parum grauiora notabilisque magnitudinis quae in aqua ſuſpenſa haereant. Summa huc redit. Provti theoria motuum in mediis reſiſtentibus, qualem in praecedente Tomo expoſui, egregie cum experimentis conuenit ſi modo media ſint fluidiſſima motusque non admodum lenti ſint, ita ſi tenacitas fluido notabilis inſit aut motus fuerit lentiſſimus, difficile eſt aliquid dicere quod et rationi et experimentis ex aſſe ſatisfaciat: credi interim poteſt in his caſibus, varia impedimenta eſſe, quae vix ad certas menſuras reduci ſe patiantur.

AN AER SANGVINI, PVLMONES TRANSEVNTI, MISCEATVR,

PER EXPERIMENTA QVAESIVIT G. B. Bülſfinger.

I.

MM. Mart. et Mai. 1728.

CVm varia Auctorum de PVLMONIBVS ſtatuta ſint, quae ancipites adhuc lectores relinquunt, operae pretium fuerit, repetitis ſolicite experimentis inquirere, quid in eo negotio poni extra dubium poſſit, quid ſecus? Placet e pluribus vnam hoc loco quaeſtionem ſeligere, multis tractatam, ſed in contrarias deciſam partes; *An aer ſanguini*, *pulmones* ex officio ſuo *transeunti admiſceatur?*

II. Equidem *id fieri* dilucide aſſerit *Clar. Mery* in Memoriis Acad. Scient. Paris. ad A. 1700. p. 279.

Auſſi *voit on*, que l'air, que l'on ſouffle par la trachée artere dans le Poumon paſſe de ſes veſicules par ſes veines dans le ventricule gauche du coeur; et que l'air que l'on ſouffle dans le ventricule droit, repaſſe par les rameaux de l'arbre du poumon dans les mêmes

mes veſicules, d'ou il s'echappe au dehors par l'âpre artere. Ainſi le poumon, qui ſert a l'entrée de l'air, ſert auſſi a ſa ſortie.

Et in iisdem Memoriis ad A. 1707. p. 210.

Que l'on ſouffle de l'air en maſſe, je veux dire tel, que le reſpirent les animaux, par la trachée artere dans le poumon, il paſſe de ſes cellules par ſes veines dans le coeur, et n'y peut entrer par ſes arteres.

III. Trahit vero momentum hic locus, quoniam *experientiae* innititur Viri induſtrii teſtimonium vt nihil de ratiociniis dicam, quae mutuatus ab *Hombergio* recenſuit loco cit. p. 212. 213. Lubens fateor, me ſubinde tantum his dictis tribuiſſe, vt aerem ingredi in pulmone ſanguinem et ipſe crediderim, et aliis perſuadere connisus fuerim. Tandem vero, vbi aliquos huic aſſerto conſtanter reluctantes deprehendi, viſum eſt decretorio id negotium experimento definire.

IV. Experimentum *primum*, praeſente et auxilium ferente amiciſſimo Collega, *Dn. Du Vernoi*, feci in cadauere viri fulmine icti, d. 12. Maii A. 1727. Praeparatio machinae haec erat. Ad Antliam Muſchenbroekianam firmaui tubulum aeneum recuruum, cuius extremitas deorſim ſpectans deſinebat in cochleam marem. Huic firmiter alligaui arteriam lobi pulmonaris integri, cui adhuc adhaerebant trunci vaſorum maiorum, venae atque arteriae, ſanguine fluido repleti.

V. 1. Exhauſi aerem primo loco, vt quan-

tum fieri poſſet, pulmo comprimeretur. Imminuta eſt tantillum moles eius: praecipue truncus aſperae arteriae ſub tubuli fine valide compreſſus apparuit. Sed ſanguinis nihil intrauit in tubulum, neque ſanguis in vaſorum maiorum aperturis ſtagnans expreſſus eſt, aut mutationem quamcunque ſubire viſus.

2. Admiſſo aere naturali, augeri paululum pulmonis volumen et praecipue tracheam ſub tubulo reſtitui: ſed mutationem in aperturis arteriae et venae nullam fieri obſeruauimus.

3. Eo facto aerem ope Antliae violenter inſufflaui, ſic, vt moles pulmonis plurimum augeretur. Etiam in hoc ſtatu, nihil aeris per ſanguinem in vaſorum extremitatibus apertis ſtagnantem exiit, neque in copia neque per bullulas. Neque expreſſus eſt ipſe ſanguis: neque obſeruata eſt ſenſibilis mutatio.

4. Cum alicubi fruſtulum lobi cultro ſepararetur, aer magna vi per apertos quosdam ductus egresſus eſt, ſed per vaſa ſanguinea, ſimul abſciſſa et hiantia, nullum ſenſimus prorumpere.

VI. Licebit ex hiſce phaenomenis inferre: niſi proprium huic lobo impedimentum conatibus noſtris intercedat, aerem inſpiratum ſanguini in pulmonibus non miſceri. Nec tamen illationi noceret ſuſpicio, fortaſſis in hoc cadauere vias minimas coagulato ſanguine obſtructas negaſſe aeri tranſitum, olim liberum, ſed fulminis ictu praepeditum: itaque idem experimentum in pulmonibus aliis debita cautela

tela repetendum duximus. Similiter ne quis exiſtimet, fortaſſis moto trans pulmonem ſanguini facilius miſceri aerem, quam ſtagnanti: experimentum et huic circumſtantiae accommodandum iudicauimus.

VII. Obtulit ſe d. 19 Octobr. 1727. noua melior occaſio. In cadauere Viri iuuenis ſubita morte in caupona extincti, cuius ſani erant pulmones et probe eloti, ſequentia obſeruauimus.

5. Lobus integer ad Antliam aptatus eſt modo, quo diximus. Extracto aere, poſt diutinam moram, nihil noui aeris per venam et arteriam patulas intraſſe viſum eſt, tum, quia trachea compreſſa manſit ſub tubulo aeneo, tum quia aer data per Antliae epiſtomium apertura cum ſtrepitu in tubulum irrupit. Hoc tentamen bis factum eſt.

6. Idem lobus aere per Antliam violenter inflatus eſt, atque tum per laeſionem fortuitam tunicae pulmonalis extimae magna vi aer egreſſus eſt, teſte vento, et bullulis, cum aqua affunderetur, citiſſime ſe inſequentibus.

7. Ex aduerſo per arteriam et venam patulas nihil aeris, exiiſſe iudicauimus; quia *a*) nec ventum ſenſimus, nec *b*) bullulas per affuſam aquam prorumpere, nec *c*) ligatis vaſorum horum aperturis eadem infra ligaturam intumeſcere obſeruauimus. Repetitum eſt aliquoties hoc examen.

VIII. Aſſumto lobo pulmonis altero, alias deinde vias tentauimus, et liquores alios.

8. Iniecta per arteriam pulmonarem ope ſiphonis ordinarii aqua tepida, vidimus *a*) egredi il-

 lam

lam per tracheam et venam pulmonarem: *b*) et multo copioſorem quidem per tracheam quam per venam: *c*) ſpumoſam fuiſſe, quae per tracheam prodiit: *d*) per venam raras aperuiſſe, ſed maiores bullulas, cum aqua et per aquam egredientes: *e*) iniectionem leniter et ſine violentia peractam fuiſſe.

9. Iniecta pari methodo per tracheam aqua, exiit illa *a*) per venam et arteriam: ſed *b*) copioſior per venam, quam per arteriam: et *c*) per arteriam veniebat paululum ſpumoſa: *d*) iniectio erat priori ſimilis et blanda.

10. Per venam iniici aqua non potuit, *a*) niſi adhibita vi longe maiori: *b*) exiit vero per tracheam ſatis copioſe: *c*) per arteriam egrediens obſeruari non potuit.

IX. Cum hactenus aqua tranſiret, vbicunque iniiceretur, redii die ſequenti, 20. Octobr. ad aerem, et lobum §. 7. adhibitum.

11. Aptata ad Antliam arteria, iniectus eſt aer: Idemque egreſſus *a*) per tracheam et venam; *b*) ſed copioſior per venam.

12. Eo viſo ſoluimus arteriam a tubulo et tracheam illi accomodauimus: iniecto poſtmodum aere, et valide compreſſo, vehementer expandi pulmonem vidimus: Sed *a*) aer neque per venam neque per arteriam prorupit: *b*) in eodem expanſionis ſtatu iniecta eſt aqua per arteriam, eademque egreſſa per tracheam et venam: et *c*) per venam ſine aere admixto, *d*) iniici non fuit difficilis. Denique *e*) cum aer antliae rareſieret, vt comprimi pulmo ab

ab ambiente poſſet, effluxus aquae iniectae largus contigit per venam, parcior per arteriam.

X. Tranſeo tentamina quae per iniectiones ichtyocollae coloratae ad detegendam pulmonis interiorem ſtructuram variis modis inſtitui, tum, quod ad praeſentem quaeſtionem neceſſaria non ſint, tum, quod nondum omnia perficere licuit, denique etiam, quod ſine exacta, iucundae ſpeciei, delineatione, qualem eo tempore obtinere non potui, nihil dici eximium poſſit.

XI. Intuli autem ex praemiſſis:

1. *Aeri* in tracheam ingreſſo *nullas in venam vias* patere, neque illum ſanguineae pulmones transeunti maſſae permiſceri in bullulis. Talem ſcil. Auctores mixtionem poſtulant; Merius dicit *en maſſe*, vt hunc miſcelae modum diſtinguat ab altero, quo aer interfluus omni fluido, etiam ſanguineo ineſſe vulgo conceditur. Pertinent ad hanc concluſionem tentamina §. V. N. 3. §. VII. N. 7. et §. IX. N. 12.

2. *Non obſtare* concluſioni noſtrae *ſuſpiciones* §. VI. quoniam prima per experimentum §. VII. N. 7. et ſecunda per alterum §. IX. N. 12. depellitur.

3. *Facilem* eſſe ſanguini *ingreſſum*, cum pulmo expanditur, et eundem *exprimi*, cum ſubſidit pulmo (vid. §. IX. N. 12.) plane vti vulgo contendunt. Conf. Pitcarn. de Reſpir. p. 51.

4. *Falli* virum egregium, ſi *generaliter* contendat, in pulmone nimium diſtento impediri ſanguinis tranſitum, v. l. c. p. 53. Exemplum contrarium vidimus §. IX. N. 12. lit. *b c d*. Fateor,

iſt.

in omni expanſione duratura deeſſe adminiculum expellens aerem, de quo Lit. *e* teſtatur. Sed non ideo impeditur tranſitus a vi impellente cordis profectus. Dabo etiam hoc, ſi diſtenſio oriatur a materia pulmonem infarciente, impediri poſtmodum liberum ſanguinis tranſitum. Non item, ſi ab aere ſolo expandatur. Hic tamen poſterior caſus attenditur, niſi fallor, vbi v. gr. *fulmen* nimia pulmonis expanſione creditur necare homines.

XII. Formari etiam *quaeſtiones* poſſunt *phyſiologicae.*

1. Cum in experimento §. VIII. N. 8. pateat, facillimum aquae tranſitum patere ex arteria in tracheam. Cur non fiunt perpetuae *ſanguinis* per tracheam *exſcreationes*?

2. Cum faciliis aquae ex trachea in venam tranſitus appareat §. VIII. N. 9. cur vel vnica fluidi *guttula* in tracheam illapſa *ingentes* excitat *motus*? Tantus ne eſt internae tunicae ſenſus, et contra ipſam aquam tumultus?

3. An recte ex hiſce phaenomenis intelligitur, quod in inflammatione pulmonis, vel auido nimium ſanguinis motu, *cruenti* ſcreatus ſequi poſſint *ſine ruptura* vaſorum: quodque imminuto per venaeſectionem aut aſſumta intus medicamina motu ſanguinis violento *ceſſare* ſcreatus illi?

XIII. Iſta quidem ſatis mihi viſa erant explorata. Cum vero eodem tempore, quo haec Societati praelegerentur, (Menſe ſcilicet Martii A. 1728.) nouum ad manus cadauer eſſet, placuit nobis id honoris

noris éxhibere Manibus *Meryanis*, vt noua *coram Societate* tentamina fierent , methodo , quam Vir egregius memorat ll. cc. Illa in ſequenti conuentu, cui per morbum intereſſe mihi non licebat , a *Cel. Dn. Du Vernoi* facta, eum habuerunt ſucceſſum , vt fides quidem obſeruatoris *Meryi* in ſaluo collocaretur , ſed de cauſa phaenomeni diuiderentur ſententiae, nouisque et repetitis tentaminibus locus fieret.

XIV. Accipe, quid mihi relatum fuerit.

13. Extracti ſunt e thorace pulmones cordi adhuc annexi, iidemque integri , et experimento maxime idonei. Inflatus in tracheam aer ope tubuli, et obſeruatum intumeſcere venam pulmonalem cordi contiguam, quin ipſas cordis auriculas et ventriculos vtrosque. Tum vero facta in ſacco venae pulmonaris inciſione egredi aeris nonnihil.

XV. Hic vero varias oriri ſuſpiciones. Mihi, audito experimento in mentem venit , inflato pulmone vrgeri vaſa ſanguifera , et liquorem , ſi quis ſit , aut aerem in illis ſtagnantem exprimi potius, quam vt nouus per tracheam inflatus e vena prodeat. Repetitum poſtridie in mea domò experimentum potuiſſet eam ſuſpicionem refellere , niſi altera eidem ſuccenturiata illam confirmaſſet et ab argumento contrario defendiſſet. Dum enim ſaepius repeteretur inflatio pulmonis per tubulum , ſemper aliquid aeris per inciſionem memoratam prodibat , vt omnino plus aeris tandem exierit, quam in cauitate venae pulmonaris ſtagnare ab initio potuerat. Sed ve-

vero, cum non niſi per interualla fieri inſufflatio poſſet, viſum eſt, aerem detumeſcente in illo temporis articulo pulmone, ſubingredi denuo per inciſionem, atque ſic alternis vicibus admitti et exprimi.

XVI. Re igitur nondum explorata, rediimus ad Antliam, abſciſſo a pulmonibus corde.

14. Iniecto per tracheam aere, vidimus *a*) aliquando pauculum aeris egredi ex trunco venae et arteriae, *b*) aliquando per longum temporis interuallum nihil eius prodire: *c*) Prodire autem eo tempore, quo aeri externo per interualla aditus patuit in aperturas vaſorum eidem expoſitas.

15. Tum vero et aquam iniecimus per tracheam, ea copia, vt pulmo impleretur: poſtea aerem eadem via per antliam. Vbi manibus pulmonem compreſſimus, vt exiret aqua et aer iniectus: *a*) venit in principio paucus aer; deinde *b*) nullus, durante licet aquae fluxu: *c*) quoties vero remiſimus compreſſionem et repetiimus, venit aliquis aer, et cum illo ſuſpicio mea §. 15. quam *d*) linteo licet adhibito et pulmoni circumuoluto declinare non potuimus, quia ne ſic quidem ſatis continue licuit pulmonem comprimere. Illud *e*) potius ſuſpicioni meae accommodum fuit, in medio compreſſionis continuae nihil aeris apparuiſſe per venam.

16. Vt autem ab eo ſcrupulo liberaremur, tandem iniecta eſt in Antliam magna aquae copia,

ea-

eademque ope Antliae in pulmonem protruſa per tracheam. Obſeruauimus, *a*) fere ab initio apparere aeris per venam et arteriam egredientes bullulas, *b*) non tamen ſine aliqua horum vaſorum differentia; ſed continuata licet antliae agitatione, additaque hac cautela, vt dum embolus retraheretur, orificium venae, cui attendebamus, ſemper aqua exterius affuſa plenum conſeruaretur *c*) ſolam ſine bullulis aeris aquam prodiiſſe, *d*) neglecta hac cautela ſub finem aereas bullulas vidimus. Cetera autem *e*) per laeſiones quasdam externae pulmonis tunicae aerem violenter erupiſſe notauimus.

XVII. Parum abfuit, quin huic experimento acquieſceremus: ſuccurrit ſcrupulus tamen alicui e ſpectatoribus noſtris. Fortaſſis nos iuſto citius deſiiſſe in continuando hoc experimento, vtique aquam omnem Antliae iniectam ſine aeris admixtione prius egredi debere: Sed, vbi ſemel haec egreſſa fuerit, tum demum cum aqua aerem quoque erupturum esſe. Equidem huic dubio videbatur reſponderi posſe, quod per repetitas illas Antliae agitationes iam dudum tanta aeris copia in pulmonem protruſa fuerit, vt, ſi qua illi in venam via pateſceret, non potuiſſet non cum aqua prodire. Praeterea aerem dudum erupiſſe per laeſionem tunicae memoratae, adeoque dudum etiam peruaſiſſe minimas tracheae ramificationes, ex quibus ſi in venam tranſitus pateat, non potuiſſet non alicubi commiſceri aquae,

et cum illa erumpere. * Quin imo poſt operationem adeo diuturnam facile ſupponi poſſe, aquam omnem pulmoni iniectam iamiam expulſam eſſe, et quae nunc prodeat, ab externa effuſione veniſſe, adeoque aerem, ſi tranſire poſſit, per illam debuiſſe dudum erumpere.

Placuit tamen repetere denuo experimentum, ſed ſine ſucceſſu: Cum enim aeris per Antliam iniectio continuaretur, donec parum aquae afflueret, non potuimus ita vniformiter comprimere pulmonem vel affundere aquam, vt conſtanter plenum maneret venae orificium: Vnde per hoc tentamen nihil obtinuimus noui.

XVIII. Alio igitur tempore, d. 16. Apr. 1728. rem denuo aggreſſi haec fecimus et vidimus.

17. Pulmones integri cum corde per tracheam antliae aptati ſunt, et intruſus aer repetitis vicibus. Effluxit *a*) per aortam plurimum aquae, cui antea pulmones immerſi erant, ſed *b*) ſine omni bullula aerea.

18. Poſtquam cor abſciſſum erat, ne aerem in ventriculo reſtare quis cauſſetur, iniecta eſt per arteriam pulmonarem aqua, *a*) copioſe per venam effluxit; *b*) fere ab initio aliquot maiores aeris bullulae cum aqua apparuerunt; ſed *c*) deinde conſtanter ſine bullulis admixtis effluxit aqua per arteriam iniecta; etſi *d*) pulmones per Antliam ſubinde magis magisque inflarentur.

XIX.

* Ita vidi, cum lac iniiceretur per tracheam, nec e vena prodiret, etſi multo aere compreſſo vrgeretur, prodiiſſe tamen aquam poſt lac et aerem iniectam.

XIX. Quoniam in vltimo hoc tentamine ad factum naturae proxime acceſſit imitatio noſtra, et aqua tamen per arteriam iniecta prodiit ſine admixto aere, modo, qui exceptionem §. XVII. non admittat: Auſim concludere.

1. *Aerem* ſanguini pulmones transeunti ordinarie *non commiſceri*.
2. Experimenta *Meriana* §. II. et noſtra §. XIV. XV. XVI. admixtas habuiſſe bullulas aereas *ex accidenti*, oriundas e cauſis, quales diximus.
3. Idemque in *aliis* obtingere poſſe caſibus, ſi v. gr. laeſionem paſſus fuerit pulmo internam, qualem nos externam memorauimus §. XVI. n. 16. lit. *e*.
4. Nouum hic exemplum eſſe, quod aliquando *aqua* tranſeat, *vbi aer* non poteſt. Nota ſunt experimenta Virorum de veſicis, quae non male ad rem noſtram faciunt. Conf. *Memoir. Acad. Scient. Paris.* ad A. 1714. p. m. 77. ſeq. Denique
5. Etiam id annotari meretur, *patere* aditum aeri *ex arteria* in tracheam, non item vice verſa. v. §. IX. n. 11. 12.

XX. Quid igitur de pulmone fiet, inquis, ſi non infert ſanguini aerem? Id ego ex factis doceri malim, quam coniectura praeuertere ſolicitum examen. Quae hactenus didici, nondum eo ſufficiunt, vt auſim officia pulmoni praeſcribere, aut in quo praecipua eius munia verſentur, definire liquido poſſim. Supereſt, de quo naturam interroges.

DE EFFECTV CALORIS VEL FRIGORIS SVBITANEI IN EXPANSIONEM VEL CONTRACTIONEM VITRORVM

EXPERIMENTVM

G. B. Bülffingeri.

1.

M. Nov. 1728. Tab. X.

VUlgatum eſt inter Phyſicos experimentum, quo oſtenditur, ſi bullula Thermometri Florentini vitrea immergatur aquae *calidiori*, primo inſtanti deſcendere in tubulo liquorem, et deinceps demum aſcendere: illud phaenomenon ex aucta vitri capacitate, hoc ex rarefactione liquoris oriri plerique omnes autumant. Vid. honoris cauſa *Amontonius* in Memoriis Acad. Scient. Paris. ad A. 1700. p. 153. et ad A. 1705. p. 101. edit. Batauae.

2. Conuerſum prioris phaenomenon primus addidit, quod ego ſciam, *Hombergius*, qui merſa thermometri phiala in *glacialem* aquam, aduertit primo *aſcenſum* fieri ſubitaneum, ob capacitatem vaſis compreſſam, deinde *deſcenſum* ſequi liquoris a fri-

frigore condenſati v. Memorias Acad. Paris ad A. 1710. p. 563.

3. Sunt haec paſſim cognita Eruditis, et approbata: Itaque in mea de Barometris diſſertatione anteceſſorum tradita ſine vlteriori cautione ſecutus fueram; donec eius phaenomeni veritas in dubium vocaretur a *Viro induſtrio*, qui ſe *experientia* domeſtica contrarium deprehendiſſe teſtaretur.

4. Repetitis igitur coram Societate experimentis cognouimus rem omnino habere, vti traditur. Succeſſum autem in tentaminibus Viri eximii priuatis contrarium ex eo ortum eſſe, quod non fuiſſet ſubitanea frigoris et caloris alternatio, ſed lenta ſolum ſucceſſio. v. Commentar. Acad. noſtrae Tom. I. p. 332.

5. De *cauſſa* experimenti nulla mihi vnquam dubitatio fuit: etſi non ignorarem, quid *Godofredo* viſum ſit in Memoriis Acad. Scient. Paris. ad A. 1700 p. 153. 154. Motum eſt dubium ab eodem Viro egregio, qui culpam liquori potius, quam vitro tranſcribere maluit. Viſum igitur, experimento vel conuellere vel confirmare receptam, quam §. 1. 2. dixi, veterum traditionem.

6. Placuit igitur phialam ſic inſtruere, vt contrarii prioribus effectus conſequantur, ſi vera eſt vulgaris expoſitio; et vt eadem perſeuerent phaenomena, ſi a liquore res pendeat. Velim, vt Lectores iudicent, quid Phaenomenorum in ſequenti machi-

chinula expectari vtroque in caſu debeat, antequam ipſa legunt tentamina noſtra.

7. Fieri curaui ab Artifice Vitriario coniunctam tubulo recuruo phialam vitream paulo plus quam hemiſphaericam, cuius fundus introrſum retractus in ſuperficiem curuabatur exteriori ad ſenſum parallelam. *Schema* ſectionis per medium factae Tab. X. exhibet.

Fig. 9.

8. Eam ſpiritu Vini Rhabarbara tincto in modum Thermometri Florentini exacte repletam, ſic, vt ad medium tubuli refrigeratus liquor pertingeret, ſuperius hermetico, quod aiunt, ſigillo idem artifex occluſit; quod tamen ſeu feceris, ſeu omiſeris, perinde eſt.

9. Experimentorum domi factorum hic ordo fuit.

1.) Infudit in ſuperiorem Phialae cauitatem amicus tentamini praeſens aquam tepidam, dum ego ſupremae liquoris ſuperficiei ſolicitus attendi: Nullum obſeruaui deſcenſum liquoris ſubitaneum; quin potius.

2.) In *primo* effuſionis momento *ſaltulum* vidi ſurſum fieri citiſſimum, quem a reliquo ſubſequente aſcenſu liquoris facillime licuit diſtinguere. Effuſa ex cauitate phialae aqua tepida,

3.) Subſtituta eſt frigida, non tamen glacialis; nullum denuo aſcenſum vidi ſubitaneum, ſed

4. Ce-

4.) Celerrimum ab initio deſcenſum, cui non reſpondebat ſubſequens; vt nullus dubio locus fuerit, quin primo inſtanti *ſaltulus* deorſum factus fuerit.

5.) His obſeruatis merſi phialam vtrique aquae alternis vicibus, ea cura, vt ſuperficiem vitri conuexam ambiret, ſed in concauam aqua non illaberetur: obſeruaui ſaltus, qui vulgo ſolent in thermometris ordinariis, v. §. 1. et 2.

6.) Nolui ſimul tentare contraria, immergendo phialam calidae, et infundendo illi frigidam vel vice verſa, ne damnum vitro inferretur, et quia gradus ſolum, non ſpecies phaenomenorum iudicaui mutatum iri.

10. Dum iſta *coram ſocietate* repetii, conſtantia eſſe omnia deprehendimus. Tum vero et illud iucundum vidimus phaenomenon.

7.) Cum aqua ſuperiori cauitati infunderetur iuſto largius, vt *ad latera* deflueret, rediiſſe phaenomena ordinaria. Ex. gr. Dum frigida ſuperne infunderetur, vidimus primo deſcenſum citiſſimum, quem ſaltum interpretor; tum deſcenſum lentum; et, quo momento ad latera haec aqua difflueret, aſcenſum denuo celerem; tum vero deſcenſum fieri. Ex aduerſo, cum infunderetur calida, primo aſcenſum eſſe citiſſimum, tum ſequi lentum: et vbi diffflueret aqua, deſcenſum fieri celerem, et deinceps redire aſcenſum.

11. Sunt haec omnia *receptae* adeo *congrua* ſententiae, vt firmari per haec phaenomena expoſitio-

ſitionem antiquam nullus dubitem. Cauſſa Phaenomenorum vel in vitri mutatione conſiſtit, vel liquoris. Sed liquore ſimiliter affecto phaenomena procedunt contraria, vbi contrarius eſt vitri ſtatus. Igitur a vitro effectus oritur; non a liquoris natura.

12. Neque me male habet, tenuiſſimam vitri laminam, a ſubitanea temperiei contrariae ſucceſſione, pati mutationes ſubitaneas, cum, ſucceſſu temporis, denſiſſima etiam corpora mutationes pati a calore et frigore apud alios iam dudum in comperto ſit.

DE

RADIIS ARTICVLATIS LAPIDEIS,

Auct.

I. G. Gmelin.

I.

EXcurrenti mihi aeſtate A. MDCCXXVIII. in campum, accidit vt in confiniis Templi cuiusdam Finnici prope pagum Slowianka, 29. leuc. Ruſſ. Petropoli diſtantem, ſparſos hinc inde reperirem lapides figuratos, quorum forma et exterior facies, cum peculiaris viſa es-

eſſet et nondum ſatis cognita, anſam mihi dedit, vt obſeruationes de iis collectas eodem adhuc anno in Conuentu Academico praelegerem, quare etiam in Commentariorum Tomo ad hunc annum excuſo comparent. Notari enim velim, eas multis aliis in ſequente anno factis locupletatas fuiſſe, quas operae pretium erat, vt prioribus adderem, quo tractatio de lapidibus hiſce plenior et perfectior redderetur. Acceſſerunt alia etiam, ad perficiendam eorum hiſtoriam haud parum conferentia. Cum enim in itinere, quod aeſtate anni MDCCXXVII. huc dirigebam, Lubecam in tranſitu ſalutaſſem, ſelectiſſimum Rev. Viri, *Iacobi a Melle*, rerum naturalium theſaurum penitius inſpicere humaniſſime conceſſum fuit, vnde inter plurima alia lapides quidam, ab ipſo *Radii articulati* appellati, memoriae infixi manebant, quorum idea ex iis, quos hic reperi, reuocata commouit me, vt Rev. Virum litteris rogarem, velit ea, quae de ſuis lapidibus obſcure animo obuerſarentur, clariora reddere, vt experirer, an cum meis conueniant plane, an aliqua ex parte diſcrepent? Quae et ille beneuole praeſtitit, communicando hiſtoriam radiorum ſuorum ſcripto exaratam, quam pace illius obſeruationibus noſtris ſubinde interpolare licebit.

2. *Succiae Regnum*, inprimis vero Inſula ipſius *Oelandia*, iis natiuitatem dedit, quos Mellius poſſidet. In *Sileſia* etiam tales reperiri, teſtes ſunt icones quaedam, a Georg. Anton. *Volkmanno* in *Sileſia ſubterranea* exhibitae. *Pruſſiam* inſuper iis fer-

tilem ex quibusdam figuris in Georg. Andr. *Helwingii Lithographia Angerburgica* conſpicuis non ſolum, ſed et vno vel altero huius generis lapide, a *Meſſerſchmidio* et *Gothwaldo* Muſeo Imperatorio illato, iudicare licet. Quos prius inueneram, relicti videbantur a baſi Templi ſupra dicti, ex puris eiusmodi lapidibus extructa, quem ideo locum pro loco natali nollem haberi: Cui vero ſubſtituo integram illam *regionem cliuoſam*, in Ingriae ea parte, quae *Duderhofio*, 30. leuc. Ruſſ. Petropoli diſtanti, vicina eſt, ſitam.

3. Obtigit enim, vt hiſce in locis quosdam horum lapidum in campis ſitos reperirem, variisque circumſtantiis detegerem, eos in vicinia effoſſos fuiſſe, et quidem proxime infra pagum *Krasna ſjelo* dictum. Eodem igitur loco, mercenariis pro effodiendo conductis, per tres continuo dies magnam horum lapidum copiam collegi; Eadem vero opera et *ſtratorum*, quibus lapides iſti immiſcentur, et quae, vti terebra metallica edocuit, cum ſtratis totius illius regionis conueniunt, *diſpoſitionem* inſpicere licuit, confirmatam et ſuppletam relationibus egregii cuiusdam Viri, officinis metallicis eiusdem loci praefecti. *Terra* primo eruitur, haecque duas perticas in profundum protenditur; ſequitur *lapis calcarius*, cui ferri minera ochracea nonnunquam, lapides autem noſtri copioſiſſime immiſcentur; hocque ſtratum ad octo perticas extenditur. Succedit *lapis ſciſſilis*, et cupri et ferri ferax, cui *ſelenitici* quidam *radiati lapides*, de quibus alio tempore, ſubinde interſeruntur. Exten-

tenditur hoc ſtratum ad vnam perticam. Sequitur denique *arena* ex candido cinerea, ſubtilis, quae licet profunde admodum terebra metallica proſecuta, emenſa tamen hactenus non fuit. Lapidum calcarii et ſciſſilis ſtrata, vbi decem perticas progreſſa ſunt, vnam perticam verſus occidentem, et $\frac{1}{4}$ perticae verſus ſeptentrionem deprimuntur.

4. Lapides iſti figurati, calcario lapidi intermixti, etſi primo intuitu omnes inter ſe conuenire videantur, eam tamen ſatis notabilem differentiam exhibent, quod aliqui in rectum extenſi, alii incurvati conſpiciantur.

5. Priores in duo diſpeſcuntur genera, quorum prius in duas abit ſpecies. Prima ergo ſit: *Radius articulatus rectus alueolo conniuente, laeuis.* Conſtat ex *patellis* plurimis rotundis, parallele ſibi invicem incumbentibus, in altera parte conuexis, (A) in altera concauis, (B) hac ratione, vt pars conuexa vnius recipiatur in concauitate alterius, quae dein partem conuexam recipit ſequentis, et ita porro. Patellae iſtae diametro fere aequales ſunt per totam lapidis longitudinem: In diuerſis autem lapidibus diverſae ſunt diametri, vt maximam duos pollices Rhenanos non multum excedere minimamque infra vnum pollicem rariſſime conſtitui hactenus obſeruaverim. Aream ſuam circularem integram non habent. In qualibet enim verſus peripheriam exſecta cernitur lunula quaedam, (*aaaa*) forma fere circulari, pro recipiendo lapide quodam cylindrico, non articulato, quem *alueolum* voco. Is omnes haſce lunulas

Tab. XI. Fig. 1, 2, 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6, 7.

nulas continuo ductu percurrens prominet extra patellas (Fig. 1. 2. 3.) et ſpecie quadam faſciarum plus minus elatarum cinctus eſt , quae reſpondent totidem patellis, vnde nimirum faciem hanc externam obtinuiſſe videtur. Vbi enim alucolus de radio ſuo forte excidit, pluribus tum iniuriis obnoxius breui laeuis redditur.

6. Generalia haec ſunt, et omnibus huius ſpeciei lapidibus communia. Singularia, quae in diverſis obuenerunt exemplaribus, iam annotare liceat. Poſſideo ſpecimina, vbi et patellae et alucoli extra eas prominens pars vndique *cooperta* ſunt *cruſta* quadam ceu cortice, tenui ſatis, cuius ſubſtantia *teſtaceae* multum accedit. Aliud, vnicum quidem, proſtat exemplar, vbi euidenter conſpicitur, corticem hunc vere teſtaceum inſinuare ſe in ſubſtantiam radii diſtinctis quibusdam in locis, cellulas quaſi conſtituentem vel *ſepta*, ita , vt inter duo talia relictum ſpatium materia ſit ſubſtantiae matricis analoga refertum; Vt probabile admodum ſit , huius ſpeciei lapides naturaliter cortice quodam teſtaceo coopertos eſſe, qui ſe per interualla verſus interiorem partem expandat ſeptaque efformet: Sic vero patellae priori §. deſcriptae erunt ea ſubſtantia lapidea, quae ſpatium inter duo ſepta relictum impleuit; Conſtant enim in omnibus exemplaribus, vbi nihil teſtacei cernitur, ſolida et pura ea ſubſtantia , qua matrix lapidum. Egregie noſtris coniecturis conueniunt, quae Mellius tradidit. „ Adhuc alia, „ inquit, interne gaudent ſtructura duplici. Primo „ enim

„ enim, continent canaliculum, partim vacuum, „ partim vero materia ſelenitica refertum, qui to- „ tum cylindri (ſiue coni) longitudinem permeat, ita „ tamen, vt medium ipſius ſpatium non occupet, „ ſed lateris vnius cortici ſit propior. Deinde reli- „ quum corpus, ex eadem materia ſelenitica conſtans, „ varias cauitates ſemilunares habet ſiue concamera- „ tiones, quae ſuis interſtitiis ab inuicem ſeparatae, „ et innumeris chryſtallis leniter rubentibus, vel co- „ loris carnei, refertae ſunt. „ Vid. etiam Volk- manni Sileſ. ſubterr. Tab. XXVIII. N. 14. vbi chry- ſtalliſationes in huius generis lapidibus occurrentes expreſſis verbis annotantur.

7. Viſuntur nonnunquam in parte alueolo- Fig. 8. rum extra patellas prominente per interualla, *cor- puſcula* quaedam *transuerſa*, quae ceu duobus cruri- bus acutum angulum efficientibus conflantur, ambas patellarum extremitates quaſi coniungentia. (*cccc*) Subſtantia eorum a reliquo lapide plane diuerſa ei accedit, qua aliis teſtacea in lapidem verſa, (oſtrea inprimis) gaudent. Et in aliis, etſi haec corpuſcu- Fig. 9. la non conſpiciantur, conſpiciuntur tamen relictae ab iis impreſſiones (*cccc*) ſquamarum figuram imitan- tes, quas Volkmannum commouiſſe puto, vt lapi- dem eiusmodi l. c. App. Tab. VI. fig. 1. et 2. deli- neatum ſpinae dorſi aquatici cuiusdam animalis, la- tis coſtis praediti, facie imponi ſibi paſſus ſit.

8. Contigit radium inuenire, cui alueolus for- te ſuus deficiebat. Canaliculus vero, alueoli cor- pori reſpondens, *cruſta* quadam ex albo cinerea *te-*

ſtacea

ſtaceae naturae intus inueſtitus erat. An haec ei coorta et connata? Ita ſane de Belemnitae maximi oxyrrhynchi calicibus membranacea quadam teſta interne obductis ſentit Ed. *Luidius* Ichnogr. Epiſt. IV. p. 116. Obſ. 3.

Fig. 7. 10. 3. 9. Multa alueolorum ſpecimina inueni, inſigniter compreſſa et diſtorta, quaedam extra radium ſuum, quaedam intra eum adhuc recondita, in quo poſteriori caſu radio etiam vel patellis eum componentibus eadem ſors obtigit. Singulare huius exemplum proſtat in ſpecimine fig. 14. exhibito, vbi

Fig. 14. alueolus (*aabb*) ex tereti ſua figura in oualem redactus figuram exprimit ellipſeos, cuius ambae diametri longioris extremitates acutae ſunt.

10. Oportet igitur, vt illi *alueoli* olim tanta ſoliditate haud gauiſi ſint, quali in praeſenti, imo apparet, *cauos* olim extitiſſe. Id mihi videre viſus ſum in ſpecimine citato. Linea enim quaedam elliptica, diuerſo a reliquo lapide colore praedita, (*c*)

Fig. 15. locum huius cauitatis indicare videtur. Diſtincte hoc cernitur in alio ſpecimine, vbi *alueolus* (AA) *alium* adhuc verſus alteram extremitatem ſitum (*aa*) et vti videtur, ex articulis conſtantem (ſuperficies enim, quae conſpicitur, caua et laeuis eſt, quaſi recepta ibi fuiſſet articuli conuexi facies) in ſe *continet*, in cuius medio *ſiphunculus* ingens ſatis (*bb*) conſpicitur.

11. Alter ille alueolus, internus nimirum, in plurimis huius generis lapidibus non in conſpectum venit, ſed vnicus ſaltim et ſolidus (Fig. 6. 7.) cernitur

nitur alueolus, qui nonnunquam in duas ſponte ſeparatus occurrit partes, externam et internam. Externa cingit internam, et ex vtraque ſui laterali parte craſſior eſt, idque eo magis, quo magis in longitudinem excurrit, verſus medium vero, tam ex anteriori, quam poſteriori parte tenuior exiſtit. *Interna* igitur pars *conica* neceſſario eſſe debet et in anteriori ſui parte, quoniam externus alueolus eo in loco tenuiſſimus, *ſpina* quaſi, (*dddd*) Cornuum Ammonis ſimpliciter ſpinatorum analoga, *exornata*. Fig. 10. 11. 12. 13.

12. Haec interna alueoli pars, cum nec articulorum nec ſiphunculi veſtigia exhibeat, eodem tamen loco ſita ſit, ac alueolus internus (§. 10.) nucleus videtur eſſe alueoli interni, olim forte caſu quodam excuſſi.

13. Internam hanc alueoli partem eandem eſſe coniicio, quam inter alia fragmenta e radiis articulatis exemta ita deſcribit Mellius: „Et alia quidem „Belemnitarum inſtar, ſunt mere ſolida, absque „vllo cauitatis cuiusdam vel articulationis indicio, „ceu cuſpis illa conica teſtatur. &c. „

14. Solui etiam iam poteſt, ad quod figuratorum genus referendi ſint lapides in maſſa quadam lapidea obuii Angerburgenſes, quorum figuras Cl. Io. Henr. Linckius, prototyporum poſſeſſor, mecum communicauit. Duo figurata in hac maſſa obveniunt. Alterum eſt radius articulatus §. 5. deſcriptus, alterum eiusdem radii alueolus, (§. 10. 11.) alium adhuc alueolum continens.

15. Attentius omnia luſtranti nullae occurrerunt

runt *differentiae* , quae ſpecies huius radii diuerſas conſtituere poſſent , niſi forte *ex patellarum craſſitie* earumque *vel arcta vel laxa ad ſe inuicem appoſitione*, quid deſumatur. Hactenus tamen nihil determinare auſim.

16. Extremitatem huiusmodi radii aſſequi nondum licuit ; etſi copia eorum , quos collegi, ad 3. centenarios excurrat. Proſecutus aliquando ſum, ſumma in fodiendo cautione adhibita, talem radium ad $1\frac{1}{2}$ ped. Rhen. in longitudinem exporrectum ; Is ſeſe tandem intra lapideam matricem , neſcio quo modo , ſurripuit, aequaliter craſſus, cylindrica vbique ſeruata figura, quam et omnes reliqui poſſident. Nec enim vel vnicum reperire potui fruſtulum, quod craſſitie ſenſibiliter decreſceret. Cui tamen contrarium videtur , quod Mellius in hiſtoria ſua ſcripto tradidit. Ita enim ille: „ Ex ampliſſimo Sueciae„ Regno - - frequenter ad nos perferuntur tabulae„ quadratae ſaxeae , coloris atque magnitudinis haud„ vnius, et altero quidem latere laeuigatae , altero„ autem rudes ac impolitae, quarum varius vſus eſt. „ In laeuigata tabularum harum ſuperficie haud raro „ conſpiciuntur radii, pedes duos tresue longitudine„ aequantes, et a baſi latiori vnius aut duorum , et „ quod nonnunquam excurrit, pollicum, in acuminatam„ cuſpidem recta linea protenſi, ſic vt latitudo ſem-„ per decreſcat , quae curuaturis plurimis arcuatis „ vel ſemilunaribus, ſibi inuicem ſuccedentibus, ab-„ ſoluitur. Efformant autem tales radios oblonga„ quaedam petrefacta corpora, in coni tenuioris for-„ mam„

„ mam protenſa et ſaxo inhaerentia , cum quo ſi-„ mul ſecundum longitudinem diſſecta ſunt. „ Relatio Cel. Viri nimis accurata eſt, vt vel leuiſſimam negligentiae ſuſpicionem mouere poſſit. De cetero enim facile fuiſſet ſuſpicari, quaſi forte hae tabulae non ad horizontalem ſitum radiorum, quibus ornantur, ſed ſtratorum, quibus in terra ſepultae incedebant, politae fuiſſent, vt adeo radii oblique reſpectu tabularum ſiti patellas ſuas, quibus conſtant, minores ſemper politura exhibuiſſent, quo magis intra tabulas reconditae fuiſſent. Sed vt exercitata in hiſce rebus opera Rev. Viri magnum ſatis ſcrupulum huic coniecturae inieciſſet, omnem dubitandi locum eximunt ea, quae Vir Cel. prioribus addit, „ poſſe et talia corpora in coni tenuioris formam pro-„ tenſa alias, ſi ſaxum malleo prouide diffringatur, ex „ eo eximi. „ Ita enim politura accuſari non poteſt. Interim ex diſcrepantia iſta haec ſequi videntur. Vel radii dantur tales cylindroidaei non ſolum ſed et conici, vti in Belemnitarum genere obtinet, vel conici ſolum dantur, et ego haud adeo fortunata ſorte natus ſum, vt apicem coni detegere potuerim. Graues tamen ſunt rationes, quae prius ſuadent, etſi poſterius temere negare nolim. Decernent de hoc aliae Curioſorum de hiſce lapidibus collectiones, et forte melior ſors mihi aliquando euentura. Ceterum appoſite ad noſtram deſcriptionem transferuntur verba Mellii, ex Io. Frid. Leopoldi relatione itineris Suecici ad D. Woodward facta, quae Londini in 8vo prodiit, adducta p. 27.

tis : - - - „ De Tabulis hiſce (Oelandicis) adhuc,„ notandum, in ſuperficie illarum polita non raro con-„ ſpici cornua quaſi longiuscula, ex maculis ſemilu-„ naribus compoſita, quae marmore crudo facile ex-„ cutiuntur et excuſſa teretis ſunt figurae, cruſtis dua-„ bus indurata, quorum interior coloris eſt cinerei, „ exterior purpurei. Intima pars circa vnum latus,„ lapidem alium continet, in varias valuulas diſtin- „ ctum, cuius extremitates Lunae exhibent faciem, „ colore cinereo; intimi vero loci reſiduum minu- „ tis quaſi chryſtallulis exiſtit repletum. „

Tab. XII. Fig. 16. 17. 18. 17. Secunda radiorum articulatorum recto-rum alueolo conniuente, ſpecies eſt: *Radius articulatus rectus, alveolo conniuente, ſtriatus. Conſtat patellis*, parallele ſibi inuicem incumbentibus, arctiori nexu vnitis, conuexis in altera ſuperficie, in altera concauis, quarum diameter, vbi plures iunctae, ſenſim at vix ſenſibiliter decreſcere videtur. (Fig. 18.) *Continent* hae patellae *alueolum*, qui, vti in priori ſpecie, cylindricus laterisque vnius cortici propior eſt et intra patellas conniuet. Figura patellarum elliptica propemodum eſt, hac ratione, vt in extremitate minoris diametri alueolus ſitus ſit, cuius diameter habita proportione ad diametrum patellarum, quibus cingitur, eſt fere, vt 2:7. cum in priori ſpecie ſit, vt 3:7. Patellarum ſuperficies tenui quodam cortice, quem ſtriae circulares vndique cingunt, tecta eſt.

18. Is cortex omnibus fere huius ſpeciei lapidibus arcte adhaeret, et cinereo colore gaudet, cum reli-

reliquum lapidis albeſcenti. Quodſi vero adhaeret, tum patellarum diſtinctio haud in conſpectum venit, aſt ſingulae circulo quodam eminenti, etiam in cortice conſpicuo, ſe produnt. In hoc caſu et alueolus vix fere conſpicitur, etſi eius praeſentia eminentia quadam in altera extremitate obuia ſe prodat.

19. Nec alueolum huius lapidis, nec patellas vnquam ſingulatim et ſeparatim offendi, quod vtrumque arctae patellarum ad ſe inuicem appoſitioni tribuendum eſſe cenſeo. Simplicem alueolum tantummodo vidi, nunquam duplicem. Longiſſimi huius ſpeciei lapides, quos inuenire contigit, vltra $4\frac{3}{4}$ pollic. Rhen. haud excurrunt, breuiſſimi vero non infra pollicem conſtituuntur. Craſſitie maximos $\frac{120}{1000}$ ped. Rhen. minimos $\frac{46}{1000}$ eiusd. ped. in diametro maiori aequare hactenus obſeruaui. Rarius occurrunt ac praecedentes.

20. Differunt a prioribus, ſi cortice ſuo tecti, ſtriis, quibus cinguntur; ſi eo denudati, patellarum haud aequabili ſeruata diametro, alueolo minori, habita proportione ad diametrum patellarum vtriusque ſpeciei, patellis denique arcte magis ſibi inuicem appoſitis. An Belemnites ſtriatus in orbiculatum lapillum redactus Luid. l. c. capſ. XXIII. N. 1733?

21. Secundum genus radiorum articulatorum rectorum eſt: *Radius articulatus rectus, ſiphunculo medium percurrente. Conſtat patellis*, aequalis diametri, parallele ſibi inuicem incumbentibus, conue- Fig. 19. 20. Fig. 21.

xis in altera parte (A) in altera concauis, (B) mutuo ſeſe recipientibus. Per harum medium *tranſit ſiphunculus* (*aa*) eadem qua lapis conflatur, materia refertus. Is non in omnibus ſpeciebus ſatis diſtincte apparet, imo in plurimis plane obliteratus eſt, ceu ſiphunculus alueoli Belemnitae. Exinde coniicio, huc et pertinere eam ſpeciem, quam ſic deſcribit Mellius: ,, Alia, licet cauitate careant, ſunt ,, tamen articulata, et alueolorum in morem ex plu-,, rimis quaſi patellis conſtant, quarum partes conue-,, xae incumbentium partibus concauis inſertae ſunt. ,, An forte Belemnitae congener cylindraceus lapis maiusculus, Volgiolum terebratum dictus Luid. l. c. N. 1747? Inſpice etiam figuram Tab. XXVIII. apud Volkmannum l. c.

Fig. 22. 22. Eſt adhuc *radius* quidam, priori quoad omnia fere ſimilis, ſed *articulati* ſaltim *facie* apparens. Loco enim patellarum conſpiciuntur annuli quidam eminentes (*bbbb*) ſerpentino quaſi ductu vel fere circulari totum cingentes lapidem, inter quorum duos ſuperficialis quidam ſinus relictus eſt. De cetero craſſities eius, quo magis in longitudinem excurrit, minui videtur. In altera ſui extremitate (*aa*) conuexus eſt, ad modum patellarum praecedentium radiorum, huicque conuexae parti ſiphunculo (*c*) pertuſae, de cetero politiſſimae, fragmenta hinc inde adhaerent tenuis cuiusdam et ſubtiliſſimae cruſtae, teſtam fere dixeris, quae et in reliqua lapidis ſuperficie quibusdam locis extat, ob teneritatem ſuam figuris non exprimenda. Subſtantia huius radii

radii eſt fere, vti lapidis lydii, rudior tamen, et color magis ad cinereum quam ad nigrum vergit, cum reliquorum omnium ſit calcaria. Hoc exemplum in Muſeo proſtat Imperatorio, quo ex Gothwaldiana collectione delatum eſt.

23. Eundem hunc lapidem exiſtimo cum eo, qui 21. §. deſcriptus eſt, cortice ſaltem ſuo adhuc tectum. Nil enim obſtat teſta, qua ſuperficies lapidis hinc inde conſperſa eſt, cum eadem teſta pluribus lamellis conſtare poſſit. Fauet vero quam maxime opinioni meae conuexitas in altera extremitate apparens et conuenientia cum priori in reliquis.

24. Altera radiorum articulatorum claſſis eſt *incuruatorum.* Hi rariſſime omnium mihi oblati ſunt. *Patellis conſtant* pene rotundis, vel ad ellipſin accedentibus, conuexis in vna ſuperficie, concauis in altera. *Siphunculo* quodam exiguo (*a*) *pertuſi* ſunt, quem tamen in vnico quodam exemplo Fig. 26. diſcernere ſaltem licet, non in medio, ſed ad latus transeunte. Hoc genus radiorum vltra magnitudinem figuris expreſſam excurrere nunquam obſeruaui. Fig. 23. 24. 25. 26. Duae forte eius ſpecies conſtitui poſſunt: *Radius articulatus, incuruatus, patellis tenuibus,* (Fig. 24. 25. 26.) et *radius articulatus incuruatus patellis craſſioribus.* (Fig. 23.) Tantum ad deſcriptionem!

25. Concinna omnino, regularis et artificioſa radiorum noſtrorum ſtructura magnum ſuggerit argumentum, eos originis haud eſſe mineralis. Vel igitur vegetabilis vel animalis ſunt. Auſim vero af-

firmare, eos ex *teſtaceorum* genere prodiiſſe. Ipſa enim ſubſtantia teſtacea in quibusdam ſeſe prodidit exemplaribus §§. 6. 7. 8. 22.) : Haecque teſtacea, vnde radii noſtri originem trahunt, ad claſſem *teſtaceorum vniualuium in concamerationes diſtinctorum*, ſi hoc nimirum praedicatum ceu character generalis aſſumatur, pertinere, prouti de Belemnitis ſtatuit Ehrhartus, pluribus argumentis euinci poſſe videtur.

26. Ex ſtructura radii articulati recti, alueolo conniuente laeuis, conſiderata, conchylii, a quo natales ducit, ſequens deſcriptio adornari poterit. Teſtaceum vniualue cylindricum (aut forte acuminatum) laeue, in concamerationes diuiſum, ita vt ſepta concamerationes efficientia non ſint integra, ſed verſus peripheriam in aliquo loco lunulae inſtar quaſi exſecta. (§§. 5. 6.) Per has lunulas aliud tranſit teſtaceum cylindricum, in concamerationes diuiſum, ita vt ſepta concamerationes conſtituentia ad latus foramine quodam, quod, quo magis conchylium in longitudinem protenditur, eo minus erit, pertuſa ſint. (§§. 9. 10. 11.) Per haec in concamerationibus pertuſa foramina aliud adhuc tranſibit teſtaceum, acuminatum, in concamerationes diuiſum et in medio ſiphunculo quodam pertuſum (§. 10.)

27. Igitur teſtaceum hoc *trium* quaſi *teſtaceorum intra ſeſe latitantium compages* erit. Vt vero concipiatur eius generatio, ſupponere neceſſe erit, tria haec teſtacea quibusdam foraminulis vel fisſuris inter ſe communicare. Requiritur enim, ceu obſeruationes exactiſſimae docent, vt animal teſtaceum

ceum immediate locetur ſub teſta ſua , quo haec effluuiis animalis generari queat. Iam vero, ſi cauda animalis teſtacei , vel pes, vel quomodocunque id vocare placuerit, ſiphunculo interioris conchylii abſcondatur, lobique inde ad latera prodeant, poterunt inde ſepta et teſta efformari , ideoque totum interius teſtaceum , medium non item , niſi ope communicationis cuiusdam animalculum corpus ſuum eo expandat. Idem ratiocinium et de exteriori valet teſtaceo. Alia meam coniecturam roborans ratio ex ratione lapidificationis , quam olim teſtacea haec perpeſſa ſunt, reddi poteſt. Quodſi nullum horum teſtaceorum inter ſe commercium esſet, qui potuiſſet fieri , vt materia lapidea in omnia ſeſe inſinuaſſet , niſi vim magnam conchylio illatam ſupponeremus? Talis vero vis in noſtris lapidibus nullo ſe prodit indicio, vt aequalis potius et regularis omnium partium conſtituentium obſeruetur coordinatio. Sequi exinde videtur , materiam lapideam per ſiphunculum teſtacei interioris influentem diſtribuiſſe ſe per illius concamerationes, indeque ſe diffudiſſe per concamerationes medii, abhinc per eas , quae exteriori cylindro reſpondent.

28. Radius articulatus rectus, alueolo conniuente, ſtriatus, ſequenti accommodari poteſt conchylio. Conchylium vniualue cylindroidaeum , ſtriatum, in concamerationes diuiſum , ita, vt ſepta concamerationes conſtituentia verſus peripheriae aliquem locum exſecta quaſi ſint. Septa huic,

ra-

ratione inita, plura ſunt, ac priori conchylio (§§. 17. 18. 19.)

29. Pro radio articulato recto, ſiphunculo medium percurrente, teſtaceum concipio cylindroidaeum, in concamerationes diuiſum, quarum ſepta in medio ſiphunculo pertuſa ſint. (§§. 21. 22.)

30. Pro radiis articulatis incuruatis conchylia fingo vniualuia, incuruata, in concamerationes diſtincta, ſeptis verſus vnum latus ſiphunculo pertuſis. (§. 24.) Haec deſcriptio egregie conuenit *Cornuum Ammonis integre diuiſorum familiae*, eiusque inprimis ſpeciei, quam ſub *Oſtrei* nomine deſcribit Philipp. Bonannus in Muſ. Kirch. Cl. II. teſt. vniualv. n. et fig. 39.

31. Liceat *originem* horum conchyliorum ex *mari* repetere. Lapides enim, quorum ea prototypa cenſeo, pectinitas eleganter ſtriatos variorum generum, conchitas anomios, et quaedam alia, forte echinitarum, forte aſteriarum, petrefacta oſſicula &c. indiuiduos vbique comites habent. Vt plus largiar, mare Balthicum antiquis temporibus eo ſeſe exporrexiſſe, vbi radii noſtri inueniuntur, radiis his ibidem, cum littora priſtina relinquens alia peteret, in ſicco reſtitantibus, coniecturare audeo. Solum pro ratione climatis fertiliſſimum, ingentis molis lapides in campis diſperſi et cliuoſa regio (§. 3.) pro priori militant. Fundus etiam et littora maris Balthici, et quae eius continuatio eſt, Finnici arenoſa ſunt, ſolum hoc itidem. Pro poſteriori faciunt, quod nullus hactenus, quod ſciam, in Europa

ropa locus radiorum noſtrorum fertilis cognitus ſit, niſi qui mari Balthico propior. Haec enim in iis obſeruata cognatio eandem prodere videtur originem. Huc et apprime refertur obſeruatio quorundam, maria huius loci imo et flumina pleraque a plaga Auſtrali et Orientali ſenſim ſenſimque recedere et petere Borealem et Occidentalem. Id de lacu Ladogaënſi inprimis quidam pro certo affirmant. Cum vero mare Finnicum non longe diſtet a loco noſtrorum lapidum natali, ſitumque ſit verſus Boream et Occidentem, probabile eſt, id ibi olim extitiſſe; quod magis adhuc illuſtratur depreſſione illa ſtratorum, quibus lapides noſtri ſepeliebantur, verſus Boream et Occidentem. (§. 3.)

32. Doleo ſaltim, eiusmodi conchylia in littoribus maris Balthici non amplius proſtare. Forte piſcium, cancrorum et nonnullorum conchyliorum more prius ſuum habitaculum deſerentia alio aufugerunt, forte in fundo ſaltim maris degunt. &c.

35. Supereſt, vt de conuenientia radiorum noſtrorum cum aliis figuratis pauca memorem. Sub eadem claſſe cum Belemnitis, Nautilitis et Cornubus Ammonis comprehendi poſſunt, ſed non ſub eodem genere. Differentia tam notabilis eſt, vt rerum harum notitia imbuto mox in oculos incurrat. Radius articulatus rectus, ſiphunculo medium transeunte differt a Belemnitarum alueolis vel cauda cancri Gesneri ſiphunculo non ad latus, ſed in medio tranſeunte; Radii incuruati diſtinguuntur a Nautilitis,

alueolo non in medio ſed ad latus inſerto, minorique curuatura.

De Figuris nihil eſt, quod moneam; Naturalem prototyporum exprimunt magnitudinem, ſi excipas.

Fig. 9. Radium dimidia parte minorem ſiſtentem.

Fig. 4. Exhibet radium articulatum rectum, alueolo conniuente, laeuem, in poſteriori parte politum, politura cum alueolo parallele inſtituta.

DE PROPAGATIONE FVNGORVM PER RADICES

Auct.

I. C. Buxbaum.

M. Maio. 1728. Tab XIII.

AN Fungi radices habeant nec ne, lis eſt inter antiquos Botanicos, de quo videri poteſt Bodaeus a Stapel in Theophraſtum. Noſtra ſententia eſt, multos fungorum per radices ſe propagare, adeoque plantas eſſe perennes, quod ſequentibus probamus exemplis.

1. Dantur Fungi, qui ex terra erumpentes aut iuniores pediculo non alte in terram demiſſo ſeu bre-

breuius radicato inſident. Sed ſucceſſu temporis, quando capitulum cum lamellis marceſcere et corruptioni obnoxium fieri incipit, radix fit craſſior, profundius in terram deſcendit et paruum quaſi tuber euadit, non alium in finem, quam vt ibi perduret et ſequenti anno nouum producat fungum. Exemplum huius rei praebet Fungus bufonius orbicularis C. B. ſecundus magis orbiculatus, ſuperne modo fuſcus ex albo palleſcens, modo flauus fuligine infectus, maculis albis et nigris aſperſis, rubetae colorem referens, inferne albus ſtriis ſubfuſcis leuibus diſtinctus, vti ipſum deſcribit C. Bauhinus in Pin. Huius figuram, quoniam nondum proſtat apud Botanicos, hic exhibemus, et quidem iuniorem in Fig. 1. antiquiorem vero et radice auctum Fig 2. Huic ſimilis Fungus in paluſtribus frequens, nobis audiens *Fungus* Fig. 3.
paluſtris capitulo puſtulato longiſſime radicatus, qui radice repente inſtructus longius repit. Nec non alius minor, *Fungus minor fuſcus capitulo conico* nobis di- Fig. 4.
ctus, qui inter muſcos radice longiſſima et perenni prouenit.

2. Dantur Fungi lignis putridis adnaſcentes, qui pariter in illis radices longius agunt et per hye- Fig. 5.
mem durant. Talis eſt Fungus dumetorum ex vno pede multiplex Tournef. Inſt. qui quando putreſcit, in radices abit longiſſimas nigricantes, ſecundum tractum ligni putridi deſcendentes et media hyeme adhuc conſpicuas, non aliam ob cauſam, quam vt anno ſequenti nouos producant fungos. Ex his facile patet, quid ſint illi fungi a quibusdam autoribus intra ipſum lignum obſeruati, nempe nihil aliud, quam

radices Agaricorum et Fungorum aliorum ex lignis naſcentium. Videmus enim, vbi Agarici exeunt, in ligno eſſe tubercula fungoſa, pro radicibus merito habenda. Sic fungus coriaceus quercinus haematodes Breyn. videtur fuiſſe radix Fungi intybacei I. B. Fungus igniarius cylindraceus Dill. Cat. eſt radix Fungi dumetorum ſupra nominati.

3. Eſt genus fungorum, qui principio, vbi iuniores orbiculares, nullis fibris aut radicibus inſtructi, quando putreſcunt et in puluerem fatiſcunt, radices acquirunt multas, inter quas radices ſimul proueniunt iisque adhaerent parui globuli, qui nihil aliud, quam radices ſeu ſemina noui fungi ad futurum annum conſeruanda. Fig. 6. Inſigne huius praebet exemplum Boletus ceruinus vulgaris, qui antiquior multas acquirit radices fibroſas albicantes, quibus ſupra dicti adhaerent globuli ceu parui bulbuli. Simile quid accidere obſeruamus Lycoperdo globoſo radice craſſa pulpa granulata, a nobis in Cent. I. Plant. minus cognit. deſcripto.

Notauit pariter hoc Raius in Synopſ. in Fungo phalloide I. B. quod late ſub terram radicibus ceu filis longiſſimis albis varie implexis repat, quibus radicibus hinc inde adnaſcantur globuli Voluae dicti. Fungus violaceus Herpetis modo lignis irrepens Rai. Syn. eſt radix Agarici meſenterici violacei coloris Dill. Cat. Fungus niger compreſſus varie diuaricatus et implexus inter lignum et corticem Rai. Syn. eſt Fungus digitatus niger Menzelii in radice adhuc conſtitutus, vel in creſcendo impeditus.

4. Oc-

4. Occurrunt Fungi , qui pediculis repunt et hinc inde radices agunt et nouos producunt, vti obſeruamus in plantis cauliculis repentibus. Tales ſunt Fungi parui albi ex cono Abietis rubrae deiecto nati, quos deſcripſimus in Cent. I. Plant. minus cognitarum ; et plures alii in lignis putridis et foliis naſcentes, quos omnes radice ſe propagare pro certo cognouimus.

Haec ſunt, quae de Fungorum propagatione per radices accurata et ſaepius repetita obſeruatione didicimus. Commendamus Botanophilis vlteriorem fungorum indagationem, inprimis, quando oriuntur et quando pereunt. Nullum enim eſt dubium, plerorumque imo forſitan omnium generationem ſic poſſe demonſtrari. Quod ſi ita eſt, omnes iſti ſcrupuli, qui hactenus multos de ſeminio et generatione fungorum ſollicitos torſerunt, ſublati ſunt.

Explicatio Figurarum.

Fig. 1. Fungus Bufonius orbicularis C. B. iunior.

2. Idem radice auctus.

3. Fungus paluſtris capitulo puſtulato, longiſſime radicatus.

4. Fungus minor fuſcus capitulo conico, cum radice.

5. Fungus pernitioſus ex vno pediculo multiplex Tournef. Inſt. cum parte.

6. Boletus ceruinus officinarum, cum radicibus, quas vetuſtior acquirit.

DE PERICLYMENO HVMILI NORWEGICO C. B.

Auct.

Ioh. Chriſt. Buxbaum.

PLanta in noſtris Septentrionalibus frequentiſſima eſt Periclymenum humile Norwegicum C. B. Botanicis tamen multis celebrioribus ignota, imo nec ipſi viſa Tournefortio, qui alias huius feciſſet mentionem. De hac et eius genuino charactere hactenus ignoto acturi, breuem eius hiſtoriam praemittere non abs re viſum eſt.

Primus hoc Periclymenum a Pennaeo Medico Londinenſi acceptum deſcripſit Carolus Cluſius in Hiſtoria Plantarum. Deſcriptio eſt ſequens: Radice eſt reptatrice; cauliculis ſeſquipalmaribus aut dodrantalibus, quibus quatuor, ſex, aut etiam octo, ex aduerſo per interualla adhaerent folia, in imis ſurculis minora, in extimis ampliora, Aſcyri foliis ſatis ſimilia, in mucronem deſinentia, quinque neruis inſignioribus ab ipſo pediculo ad mucronem excurrentibus. E quorum ſinu ad latus pediculi florem ſuſtinentis aliquando vnicus, vtplurimum bini, vtrinque ſcilicet vnus, exſurgunt ramuli, binis aut qua-

quaternis foliis ſimili ſerie diſpoſitis praediti. Florem porro ſummis cauliculis nitentem, quatuor petalis candicantibus conſtantem producit, in cuius medio multae bacculae, petiolis ſuis inhaerentes, per maturitatem rubentes, intus albae, racematim cohaerentes, ſucculentae, ſapore admodum dulci.

Duas fecit ſpecies C. Bauhinus; ſed vnam eandemque plantam eſſe Periclymenum humile C. B. ſeu Chamaepericlymenum Cluſii et Periclymenum humile Norwegicum C. B. ſeu Chamaepericlymenum tenerius aliud Cluſ. Hiſt. quod Raius iam adnotauit, certiſſimum eſt et differentia ſolo loco natali adſcribenda venit.

Adſignat huic Periclymeno certum locum et nouum inde genus conſtituit Raius Meth. emend. et aucta. Huius notas facit: Plures acinos ſuis ſinguli petiolis haerentes (non in baccas conſtipatos,) ſingulis floribus ſuccedentes; Folia Aſcyri, florem tetrapetalum. Et hoc nouum genus cum Cluſio Chamaepericlymenum vocat.

Notandum autem, illum florem tetrapetalum, quem deſcribit Cluſius et Raius pro fiore habet, non eſſe florem ſed perianthium eleganter ſtriatum et inſtar floris coloratum. Gaudet equidem notis flori competentibus, colore nempe et fugacitate, et alio praeterea ornatur perianthio, ſed ſterilis eſt, et in ſinu ſuo complectitur plures flores tetrapetalos, in flore recenti optime conſpicuos, ſatis magnos, luteſcentes, ex quatuor petalis acutis cruciatim poſitis conflatos, ſuis petiolis innixos, quos ſequuntur bac-

cae

cae ſupra deſcriptae. Hinc aut duplex Chamaepericlymeno flos ſterilis, nempe maior et fertiles minores aut duplex perianthium adſcribendum venit, quod cuique liberum relinquo, ſufficit genuinum eius exhibuiſſe characterem.

Finnis et Ingris in vſu ſunt folia decocta aduerſus febres. Baccas colligunt et ſiccant, quorum pulverem nephriticis prodeſſe dicunt.

Obſeruandum adhuc de huius floribus ſpuriis (ſic vocamus flores tetrapetalos albos ſeu calyces) quod non omnes in ſinu ſuo complectantur flores luteos foecundos et baccas ferentes, ſed plurimos eſſe inanes, et nullum procreantes fructum, qui ſi marceſcunt, ſui tantum veſtigia relinquunt, vti obſeruamus in cucurbitis aliisque flores ſteriles et fertiles generantibus plantis.

OBSERVATIONES
CIRCA
QVASDAM PLANTAS INGRICAS

Auct.

I. C. Buxbaum.

Tab. XIV. OMnium Botanicorum recentiorum conſenſu pro genuina Alſines ſpecie hactenus credita eſt Alſine maritima folio Portulacae C. B. ſeu Alſines genus pelagicum Cluſii. Ex accuratiore obſeruatione tamen didici, illam

illam flore et fructu ab Alſine maxime eſſe diuerſam. Petala enim floris non ſunt bifida, vti in Alſine, ſed rotunda, quaſi criſpa, raro multum aperta, ſed plerumque contracta. Fructus eſt ex ouato acuminatus, tribus valuis dehiſcens, ſeminibus foetus aliquot rotundis. Ex his patet, quod magis cum Telephio legitimo Imperati conueniat quam cum Alſine, a qua praeterea toto habitu differt. Referri itaque ad Telephium et Telephium maritimum Portulacae folio dici poterit. Si quis tamen ob folia coniugata ad Helianthemum referre mallet, me non habebit diſſonantem.

Plantaginellae nouum genus fecit Raius Meth. em. ſed florem putat eſſe pentapetalum, qui tamen monopetalus in quinque lacinias diſſectus. Sub Plantaginis aquaticae vero ſpeciebus ex obſeruatione Pluk. contra Hermann. in Hort. L. B. haec planta comprehendi nequit.

Nouam Lunariae ſpeciem fecit Breynius Cent. I. quam vocat Lunariam folio Matricariae: ſed illa nihil aliud eſt, quam Lunaria vulgaris, nonnunquam ita varians, vt magnitudine ac ramorum maiori numero pro diuerſa ſpecie imponat. Varietas pariter, non diſtincta ſpecies a Lunaria vulgari: Lunaria folio Adianthi eiusdem Breynii. Omnes noſtrae Ingriae ſatis frequentes plantae, et folia in vna ſaepe planta varie ludunt et diuerſa proueniunt.

Genuina Muſci ſpecies eſt Muſcus Norwegicus, vmbraculo ruberrimo inſignitus Muſ. Pet. quem Tournefortius incongrue Lichenibus accenſuit et Li-

chenem capillaceo folio, elatiorem pelui ruberrima vocat, deceptus forte a ſcuto, quod hic in ſummo fert pediculo; quum ſciret, multōs ex Lichenibus eſſe ſcutigeros. Sed hoc ſcutum in hoc Muſco vires gerit calyptrae, ſummo nempe capitulo pyriformi impoſitum, et eſt calyptra quaſi expanſa, quod iam obſeruauit Plukenetius in Almag. qui inquit, quod eius capitula vmbellae ſatis amplae, elegantis phoenicei coloris, ſcutum quodammodo referentis, medio innitantur.

Agaricus fraxineus, niger, durus, orbiculatus Tournef. Inſt. eſt Agaricus pedis equini facie Tournef. Inſt. ſeu Fungus igniarius Trag. qui aquae diu immerſus nigrum contrahit colorem, quod et interdum ipſi accidit a pluuiis.

Ranunculus rotundifolius vernus, ſyluaticus, maior vel Caſſubicus foliis Thorae ſiue Calthae Breyn. Prodr. eſt Ranunculi rotundifolii verni ſylvatici I. B. varietas maior. Notandum etiam de Pentaphylloide paluſtri rubro foliis craſſioribus villoſis Tournef. Inſt. ſeu Pentaphyllo palluſtri rubro, craſſis et villoſis foliis Suecico et Hybernico Pluk. idem eſſe cum Pentaphyllo paluſtri rubro C. B. Huc etiam pertinet Lychnis Suecica Been album folio, habitu calyce ampliſſimis, Gumſepungas ſiue ſcrotum arietis dicta Boerhav. Ind. H. L. B. quae Been albi officinarum I. B. varietas maior.

Lichen cruſtae modo arboribus adnaſcens, tenuiter diuiſus Tournef. Inſt. peltas profert inſtar Lichenis terreſtris cinerei Rai. H. vid. Fig. 1.

In

In truncis arborum frequens Muſci parui elegans ſpecies, ex qua nouum genus Vaillantius in Bot. Pariſ. ſub nomine *Muſcoides*, et iam ante ipſum Dillenius Cat. Gieſſ. ſub nomine *Mnion peranguſtis et brevibus foliis*, conſtituerunt, deſcripta iam a Raio in Syn. vocatur Muſcus coronatus minimus, foliolis, capitulis et pediculis minimis erectis Moriſ. Hiſt. Oxon. vbi figura ſed minus bona, hinc meliorem dare placuit. vid. Fig. 2.

Lichenis nona ſpecies creſcit in truncis ſalicum circa riuulos et fontes, ſplendide nigricat et conſiſtentia ad Lichenes gelatinoſos accedit, exhibemus hic huius figuram et *Lichenem arboreum membranaceum, nigricantem* appellamus. vid. Fig. 3.

Poſtremo mentio facienda eſt plantae Liuonicae, quae Alyſſi ſpecies et Alyſſo folio Veronicae Tournefortii ſimillima, ſed flores fert luteos. Quod cum conſtanter faciat, merito pro noua habetur ſpecie. Occurrit circa Weſenberg et floret Maio.

OBSERVATIONES ANATOMICAE

De duplici oſſis femoris luxatione oppido rara, dein de ſtatu p. n. in duobus craniis, quorum alter alteri contrarius plane erat, ex doctiſſimi Viri Io. Saltzmanni *litteris d. 4. Iunii* 1727. *excerptae.*

I.

IN cranio fabri ferrarii, cuius cadauer ob non leuem veneni dati ſuſpicionem cultro anatomico ſubiectum fuit, duae exoſtoſes ſubſtantia oſſeo - ſpongioſa conſtantes forte fortuna reperiebantur ſiniſtro oſſi bregmatis accretae et ſuper os frontis aliquatenus extenſae, altera exteriori tabulae annexa erat altera interna, haec ſatis rotunda haemiſphaerium globuli ſeu globi minoris aequabat, illa paulo minor. Ab interna cerebrum multum compreſſum fuiſſe coniectu facile eſt, vnde etiam homo iſte, cum in viuis adhuc eſſet, ad quaſcunque actiones paulo ſegnior erat,

erat, ſenſibusque praeprimis internis non adeo ac alii ſolent pollebat.

II.

Alter caſus exhibet cranium carie notabiliter exeſum eo in loco, vbi in infantibus fontanella conſpicienda eſt ad laeuam paululum vergente foramine thalero maiori, per quod materia fungoſa durae matri adnata erumpebat et integumenta in magnum ſatis tumorem eleuabat. Nobilis foemina non aliam huius mali cauſam allegare poterat praeter ictum, quem a tribus abhinc annis acceperat, a quo tamen, ſi relationi eius fidem adhibere licet, vel nullum vel leuem prorſus dolorem percepit, qui haud diu ſubſtitit, ſed breui euanuit neque poſtea rediit, quem tamen pericranii membranae valde ſenſibilis eroſio excitare vtique debuiſſet. Materia ſungoſa dictum foramen adeo obturavit, vt diſſectis licet integumentis et parte huius materiae ſectione ablata locus non daretur et ſpatium humores ſub cranio latentes ſtagnantesque euacuandi, et malum radicitus auferendi, vnde factum, vt omni etiam a Medicis et Chirurgis adhibita cura et opera Nobilis illa Matrona poſt continuos vomitus multum debilitata exſpirauit.

III.

De luxatione oſſis femoris gemina pauca quaedam adiiciam, quae haud ita pridem in Theatro noſtro Anatomico obſeruata fuit, altera ſine fractura colli, altera vero cum

eadem vel potius cum ſeceſſu epiphyſeos coniuncta. In hac videre erat id quod Cl. Ruyſchius quoque annotauit, nempe dicta epiphyſis velut annihilata erat, nullo plane veſtigio eiusdem ſuperſtite, et colli parte, vbi illa adnata antea fuerat, adhuc dum inaequali. Et huius collum et alterius illius capitulum ex acetabulo oſſis coxendicis elapſum oſſis ilii ſedi externae paulo ſupra nominatum ſinum inſiſtebat, et ab attritu a longo tempore facto cauitatem quandam et ſinum velut ſuperficialem efformauerat, vnde pede breuiore licet exiſtente vtrumque ſubiectum, quorum prius maſculinum, poſterius vero foemininum erat, quamuis non expedite greſſus firmare et progredi vtcunque poterat. Ea quae in Diſſertatione de luxatione femoris rara, fractura frequentiore ante aliquot annos ſtabiliui, obſeruatis hiſce aliquatenus conuelli prima fronte videntur. Sed videntur, praeter enim quod in vno horum ſubiectorum fractura cum luxatione complicata erat, in aliis hactenus illam frequentius quam hanc deprehendere mihi licuit, neque dubito, quin experientia optima rerum magiſtra ea, quae in allegata diſſertatione probatum iui, indies magis magisque confirmatura ſit. *Hactenus Celeberrimus Saltzmannus.*

IV.

DE inſolenti et explicatu difficillimo genere *hydatidum* in primo Tomo Commentariorum Acad. Imper. memorabile exemplum vnaque ſuper earum formationem coniectura proponitur. vid. pag. 379.

379. et ſeqq. Hae non, vti ſimplices hydatides de quibus vulgo exempla afferuntur, ſteriles ſunt ac puram aquam continentes; Verum alias in ſe veſiculas includunt ac propterea proliferae ſunt. *A Nicolao Stenone* in anatome *Rangiſeri* duae in omenti circumferentia hydatides repertae ſunt, vna magna inſtar oui gallinacei, altera parua inſtar oui columbini, quarum ſingulae aquam puriſſimam continebant, illa tamen praeter aquam, materiam quandam gypſeam piſi maioris magnitudine in ſe complectebatur. Et minor veſicula Lymphatica in maiori continebatur *quaſi praegnante.* Hae hydatides, *inquit*, videntur in ceruorum genere naturales, in aliis antea a me viſae. In hiſtoria quoque Acad. Regiae Paris 1722. ſerius mihi oblata exemplum talium hydatidum exſtat.

Secunda modo vice eas mihi obſeruare contigit die 15. Ianuarii huius anni, contemplanti foeminae vetulae tubas Fallopianas: Namque membrana haſce inter et ouaria intercedens, plurimis veſiculis cryſtallinis grani tritici magnitudinem haud excedentibus obſita erat, quale vitium ſaepe numero in vetularum ouariis ſolet contingere. Harum nonnullae ſola aqua diſtentae erant ſeu infoecundae. Aliae minoribus veſiculis in liquore cryſtallino immerſis impraegnatae: iucundo ſane ſpectaculo poſt aſpectum triſtiſſimum cadaueris, cuius poſteriora ad plantas pedum vsque igne torrefacta inque locis nonnullis adeo conſumta erant, vt tendines oſſaque de-

nu-

nudata apparerent, his adde fiſſuram magnam in cranio, ad occipitis foramen magnum terminatam, vtramque tabulam penetrantem, absque vlla effuſione ſanguinis. Sed an ignis talem effectum producere poteſt?

V.

Cur viris mamillae a natura datae ſunt? apud Anatomicos ſaepe diſquiritur. De hocce problemate, hoc anno coram Academia diſſertatio praelecta fuit, quae vero ante ſui publicationem maiorem praeciſionem experimentorum poſtulat. Video equidem perdifficile eſſe perſuadere, quod lactis generatio haud functio ſit ſolis foeminis propria quodque a viri grauitate ſeu dignitate vel ab ipſa rei veritate minime alienum ſit affirmare, commune id eſſe vtrique ſexui beneficium, non obſtante eo, quod multi hocce beneficio careant aut illud non aduertant: Nam ſicuti foeminae non omnes nec quolibet tempore lacti generando aptae ſunt, ita quoque plures eſſe cauſſae poſſunt, ob quas apud vnam gentem virorum mamillae magis ſucculentae et lacti producendo aptiores ſunt quam apud alteram, quales cauſae ſunt coeli, educationis, vitae generis, temperamenti varia diſpoſitio. Apud Thomam Bartholinum Anatom. Libr. II. Cap. I. edit. Lugd. Batav. mentio fit integrae nationis in nouo orbe, cuius viri pene omnes magna lactis copia abundant. In Ruſſia id amplius rarum non eſt hodie, poſtquam mos cadauerum inſpiciendorum introductus eſt. Obſeruaui enim virorum pene omnium mamillas poſt leuem compreſſionem ſuccum dare modo lacteum modo ſeroſum,

ſum, pluribus etiam poſt mortem diebus, non obſtante aere gelidiſſimo.

VI.

Solet quoque in plurimis ſubiectis haud raro obſeruari columella bifurcata inſtar dentis molaris. Haec particula, quae alias vnico apice conſtat, vulgo plectrum vocis appellatur. An a primaeua conformatione? vel ab exercitio vocis aut vociferationibus? vtrumque probabile eſt. Namque haud impoſſibile eſſe videtur, vt duo cylindruli muſculares, qui in columella laxius vniti ac ſolummodo contigui ſunt, ſucceſſu temporis laxato eorum vinculo, ſimulque membrana glanduloſa eos inueſtiente, a ſe inuicem remoueantur hacque diſſociatione duo apices in columella enaſcantur. Ceterum, vti reliqua corporis membra, ſic in ſpecie organa vocis admodum valida et robuſta huicce genti a natura conceſſa ſunt.

VII.

Longa et periculoſiſſima per vterum nauigatio eſt, donec in portum nouus hoſpes proiiciatur, prouti innumera exempla aſſerto fidem faciunt. Sed quanam virtute tenellus embryo atrociſſimis plagis, vulneribus, tormentisque reſiſtet intra potius quam extra vterum? Id equidem captum noſtrum transcendit. Infans in hac vrbe natus eſt cum enormi vulnere totum verticem occupante, ac tenui ſolummodo pellicula obducto, per quam anfractus cerebri in conſpectum veniebant. Poſterius duo globi ſeu tumores exſtabant, ſiniſter pugni magnitudinem

 dex-

ter ouum gallinaceum aequans amboque molles ad tactum erant.

VIII.

Contemplanti vterum, in quo molam membranaceam geminam inueni, ecce in exteriore ceruicis circumferentia, quam ori tincae piſcis aſſimilant anatomici, plurima oſtiola valde conſpicua oblata ſunt, quorum octodecim numeraui. Ex eorum numero, vti opinor, bina ſunt ductuum oſcula a *Celeb. Santorino* in poſteriore parte ceruicis obſeruata quarum mentionem facit Cap. XI. Obſeru. Anat. Art. IX. Hi autem ductus a veſiculis oualibus prorſus diſtincti nullamque cum iis ſocietatem habere viſi ſunt.

IX.

Ex duobus fratribus gemellis die 15. Sept. huius anni ſimul natis, primus in lucem prodiens ſeu praecurſor triſte oculis ſpectaculum expoſuit. Quid enim triſtius eſt, quam naſci vt truncus ſine brachiis. Nullum in eo cum dextri tum ſiniſtri veſtigium ſiue humeri ſiue brachii; Verum cutis inſtar ſacci imperforata, coſtasque immediate attingens intuenti oblata eſt, plana ac ſine cicatrice aut coloris diuerſitate. Caeterum, quoad molem corporis ac praeſtantiam ſenſuum motuumque vitalium naturaliumque a ſuo fratre minime diuerſus apparebat, cum quo etiam, vt in tranſitu id moneam, communis ei placenta fuit. Ambo die prima Octobris vitales adhuc erant.

P. S.

P. S. Dum haec praelo committuntur, Cadaver accepimus praefati pueri in lucem ſine brachiis editi, occaſioneque ſic nata, in conſeſſu publico Academiae d. 5. Maii 1731. celebrato, rarum illud ſpectaculum expoſitum, fuit.

DISQVISITIONES PHYSICAE DE TVBVLIS CAPILLARIBVS a Iacobo Iurino *AD ACADEMIAM TRANSMISSAE* VT EIVSDEM COMMENTARIIS INSERERENTVR, *VNA CVM NOTIS* a Georgio Bernhardo Bülffingero, AD QVEM ID NEGOTIVM PERTINVIT, ADIECTIS

conſ. Comm. Tom. II. p. 233. *et ſeqq.*

IN legenda pererudita Diſſertatione Cl. Bülffingeri de Tubulis Capillaribus, voluptatem, vt verum fateamur, non vulgarem cepimus, quod explicationem noſtram iſtiusmodi phaenomenων, caeteris omnibus Doctiſſimorum Scriptorum Hypotheſibus, quas ibi fuſius recenſet et examinat,

tanto auctore videremus anteferri. Qui tamen cum ſcrupulo teneatur vno aut altero, quo minus ad ſententiam noſtram accedat, videmur nobis operam Viro laudatiſſimo non ingratam praeſtituri, ſi hos illi eximere pro viribus conemur.

I.

Primo itaque loco diſplicere videmus Viro Cl. quod attractionis voce vſi ſimus ad exponendam actionem vitri in aquam ſuſpenſam, cum is dolere ſibi profitetur, *miſceri* et *officere* noſtrae, quam vocat, *Hypotheſi vulgarem de attractionibus litem.* Qua etiam cauſa excuſationem quandam ſubiicit ad explicationem noſtram *hoc vinculo ſoluendam.* Candide ſane et perhumaniter! Eam vero nos perlibenter accepimus, quoniam tanti Viri ſententia excuſatione omnino indigere videmur. Ceterum ſi attractionis loco aliam vocem, vtpote congruitatem, cohaeſionem, propenſionem, ſiue etiam impulſum aquae ad vitrum ſubſtitui placeat, nullam nos litem mouebimus. Res modo conſtet, verba non morabimur. *

Atqui, ſi libuiſſet, non dico Cl. Biilffingero, ſed aliis quibusdam, qui has lites toties redintegrant, animum adtendere ad Newtoni verba, quo principe recepta eſt in Philoſophiam ea vox, minus profecto iſtis litibus laboraret Reſpublica Litteraria. Magnus ille Vir ſtatim ab initio Philoſophiae Naturalis Prin-

* Egregie vero iſta. Nihil eſt, quod in hac doctrina aut deſiderem, aut mutatum velim.

Principiorum Mathematicorum, nempe ſub finem definitionis octauae, ſatis, vt putabat, per verba ſequentia cauerat ab huiusmodi cauillationibus. *Voces autem attractionis, impulſus, vel propenſionis cuiuscunque in centrum, indifferenter et pro ſe mutuo promiſcue vſurpo; has vires non phyſice, ſed mathematice tantum conſiderando.* * *Vnde caueat lector, ne per huiusmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis, cauſamue aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris (quae ſunt puncta mathematica) vires vere et phyſice tribuere; ſi ſorte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.* Item ſectione vndecima libri primi ſignificat, ſe *conſiderare vires centripetas tanquam attractiones, quamuis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur impulſus.* In Scholio vero Prop. LXIX. Libri eiusdem haec habet. *Vocem attractionis hic generaliter vſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad inuicem; ſiue conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuo petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe inuicem agitantium, ſiue is ab actione aetheris aut aeris, mediiue cuiuscunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe inuicem vtcunque impellentis* Quodſi conſulantur quae ſub finem

* Nihil poteſt melius dici. In conſideratione Mathematica non vtique phaenomeni cauſſa quaeritur, ſed quantitas: Igitur perinde eſt, quocunque vtaris nomine, modo menſuram teneas. In phyſica expoſitione phaenomenωn ſpecialium licet illa reducere ad generale aliquod naturae factum. Id ſi certum ſit, poteſt vtique appellatio eius relinqui arbitrio philoſophantium, modo cauerint cum Newtono et Iurino, ne id nominis obſit diligentiae eorum, qui generalis phaenomeni originem phyſicam vlterius inquirere inſtituunt. Id quoniam hoc ipſo paragrapho faciunt Viri inſignes, neſcio ſane, quid ab illis poſtulari amplius poſſit!

ſecundae et tertiae Editionis Principiorum de ſpiritu quodam ſubtiliſſimo adiecit, liquebit tantum abeſſe vt Newtonus attractionem pro qualitate corporum primaria habuerit, vt ipſe eius attractionis cauſam data opera inueſtigauerit.

Haec autem fuſius adnotare volui non tam Cl. Bülffingeri cauſa, qui ſua ſponte rem apte et candide interpretatur, ſed aliorum quorundam, quibus ad attractionis mentionem confeſtim bilis mouetur, quique eam vocem cane peius et angue deuitant, adeo vt actionem mutuam inter vitrum et aquam, ſi de ea forte loquendum ſit, amicitiae potius, aut conſanguinitatis, vel etiam nuptiarum, ſi diis placet, quam attractionis nomine appellaturi videantur. Quorum contentiones et clamores tantum potuerunt, vt facta ſit quaſi quaedam Schibboleth inter philoſophantes iſta vox, *Attractio.*

II.

Secundum ſcrupulum * mouet Vir Cl. ex Phaenome-

---

* Recte ſcrupulum appellat Vir Eximius id, quicquid fuit, dubitationis meae. Neque enim eo tempore, quo diſſertatio mea typis excuſa eſt in eo argumento aliquid confiſus ſum. Sed non licuit mihi id ſilentio praeterire. Quid igitur facerem? Inflexi rem omnem, vt transpareret ſcopus meus, nec tamen argumenti commemoratio officeret famae Viri Clariſſimi. Dixi: ita viſum fuiſſe, cum prima vice haec expenderem, et falſo mercurii parum puri phaenomeno deluderer. Vide, ſi placet, Tom. II. Comment p. 282. lin. 3. ſeqq Vbi repetito tentamine aliter de mercurio non adulterato conſtitit, verum eius phaenomenon plane conuenire hypotheſi Iurinianae liquido pronunciaui l c. lin. 1. a fine. Addidi: nec phaenomenon aquae penitus aduerſari, ſi huc transferas, quod alia occaſi ne Vir Ingenioſus monuerit, cum de gutta mercurii inter duas vitri (male impresſum eſt, aquae) ſuperficies conſtituta, differeret. Et ne deeſſem Viro Meritis-

nomeno 46. ſuae diſſertationis. *Cum aqua trans tubum ſugitur gracilem, idemque madidus horizontaliter reponitur, obſeruare licet particulas aquae lateribus fiſtulae internis adhaerentes ſenſim ſenſimque coire in cylindrulos aqueos, totam internam cauitatem replentes, terminari illas vero ſuperficiebus concauis.* Hinc videtur viro laudato non poſſe *concedi fortiorem aquae ad vitrum, quam ad ſeipſam attractionem.* Expendamus ergo id Phaenomeni.

1. Superficies concauae praedictae aperte nobiscum faciunt. Quid enim prohibet, harum ſuperficierum extremitates vitro adhaerentes ab eodem rece-

ritiſſimo, explicationem iſtam enarraui atque his verbis concluſi: ſi hoc aut ſimile aliquid applicari ad aquam in Phaenomeno noſtro 46. poſſit, ſalvam eſſe etiam hac in parte ſententiam. Expleuit iſtam ſpem meam Vir Clariſſimus, igitur loco nouae exceptionis gratias potius, et aſſenſum accipiat meum. Tum vero pro excuſatione eius paragraphi mei audiat hanc rei geſtae ſeriem. Quo tempore mercurius me fefellerat parum viuus, eo coram Societate noſtra vſus eram argumento huius phaenomeni, neque id imbelle habitum fuit. Quid enim? Si mercurius vtcunque poſitus internis fiſtulae vitreae lateribus adhaeret, non colligendus in bullulas, dum ex aduerſo aqua ſimiliter poſita a vitro ſe retrahit coitura in bullulas et cylindrulos: annon inde liceat arguere, maiorem eſſe mercurii ad vitrum, quam ad ſeipſum, attractionem, et aquae eſſe maiorem ad ſe, quam ad vitrum? Sed vbi repetitum argento vere viuo tentamen aliud docuit: aequum cenſui et Iuriniani nominis honori debitum, vt de mercurio contrarium diſerte teſtarer et de aqua monerem, nondum id experimenti conficere hanc cauſſam; eſſe quod reſpondeat Vir Doctiſſimus. Potuiſſem omnino liberare ſententiam Viri ab ea obiectione. Id nolui, ne praeriperem Lectoribus interpretationem authenticam. Superficies aquae concauas iuuare ſententiam intellexi et profeſſus ſum, vbi conuexas mercurii plane illi conuenire dixi. De altero ſententiae momento poteram haerere. Neſcius quantum attractio aquae ad vitrum ſuperet attractionem eius ad ſeipſam, ex mente Cl. Iurini, debebam ambigere, an ex vi illius differentiae diffluere potius guttulae aqueae, et per omnem vitri ſuperficiem diſtendi, an ob differentiam contactuum debeant confluere? Id poſtquam Vir Eximius definiuit, nihil repugno, quominus et hoc phaenomenon inter illa referat, quae ſententiae ipſius amica eſſe in ipſa prima mea diſſertatione ſponte aſſerui.

cedere, et aquae reliquae coniungi, cuius attractioni ſollicitantur ad formandam ſuperficiem conuexam, vt omnes aqueae particulae ad ſe inuicem quantum fieri poteſt accedant? Obſtat nempe fortior vitri attractio.

2. Notandum eſt guttularum tubi madidi parietibus adhaerentium duas eſſe ſuperficies, alteram vitro contiguam, alteram aeri expoſitam, quam vocemus liberam. Cum autem binae vel plures harum guttularum, quas poſitas eſſe contigit intra ſphaeram mutuae attractionis, ſenſim coeunt et in cylindrulum formantur, fit id quidem attractione mutua aquae ad aquam, et ſuperficies antea liberae iam inuicem applicantur et cohaerent. Superficies autem prius vitro contiguae adhuc eidem contiguae ſunt. Fieri quidem aliquando poteſt, vt minor aliquantulo ſit ſuperficies vitro cohaerens totius cylindruli, quam fuerat ſumma ſuperficierum vitro contiguarum ante guttularum coitionem: ſed hoc abunde compenſatur ex cohaeſione inter ſe ſuperficierum prius liberarum. Conducit ergo ad coniunctionem guttularum attractio aquae ad aquam, nihil vel parum repugnat attractio aquae ad vitrum. Vnde hic caſus reducitur ad caſum guttulae hydrargyri inter duas vitri ſuperficies conſtitutae, cuius Phaenomeni ſolutionem noſtram ſatisfeciſſe video Doctiſſimo Autori.

III.

Tertia, eaque omnium grauiſſima, difficultas oritur Viro Clariſſimo ex Phaenomeno 49. ſuae Diſſer-

ſertationis, quod his verbis proponit. *Sit Tubus inaequaliter amplus, et immergatur in aquam aere ſuo purgatam nonnihil profundius, madeſiat ſuperne tubulus in vacuo, et extrahatur aliquantum: apparebit altitudinem vtriusque aquae ſimul ſumtam reſpondere altitudini, quae conuenit tubulo anguſtiori, et multo maiorem eſſe, quam quae ampliori debetur.*

Solutionem noſtram huius phaenomeni, cum in aere ſit experimentum, vtcunque admittit Vir Doctiſſimus. In vacuo difficillimum cenſet vt explicetur. Ego impoſſibile eſſe aio, cum in vacuo id experimenti neque factum ſit, nec noſtra ſententia fieri omnino poſſit. At, inquit, nobis auctoribus Vir Cl. *experimentum etiam in vacuo ſuccedere.* Doleo profecto Virum egregium in id erroris incidiſſe, quod fidem haberet non nobis quidem, ſed Editori Epitomes Actorum Londinenſium, quo libro eum vſum eſſe videmus. Huius enim Editoris incuria et negligentia factum eſt, dum Diſſertationes noſtras ſuo more redigere voluerit in compendium, vt crediderit Cl. Bülffingerus experimentum in aere factum, quod in ſecunda noſtra Diſſertatione ad erroneam Viri cuiusdam Doctiſſimi opinionem de aquae ſuſpenſione refutandam adducitur, etiam in vacuo fuiſſe repetitum eodem euentu, cum nos id ſolum dixiſſemus, Experimentorum omnium in priori noſtra diſſertatione memoratorum eundem in vacuo fuiſſe euentum, atque in aere fuerat. Agnoſco igitur vim argumentorum Viri Acutiſſimi, firmiſſimorum ſane et validiſſimorum ſi contra factum ipſum potius,

quam contra facti explicationem adducta fuiſſent: agnoſco pariter ſummam eius humanitatem et candorem, quod rem ab omni veriſimilitudine alienam fide tamen, vt putabat, noſtra credere dignatus ſit. *

IV.

---

* Hic vero me ab ingenti onere liberas, Vir Clariſſime! Niſi id in Te iniurium eſſe perſuaſum habuiſſem, dudum illi experimento refragatus eſſem; quoniam id vnum ſe pertinaciter oppoſuit meae phaenomenorum capillarium expoſitioni. Dicam, quod res eſt. Tantam ego dictis, quae Tua credidi, fidem habui, vt nonniſi inuitus cogitauerim de repetendo illo tentamine, ne ſi me forte deſtituat induſtria, ad ſolicitandam aſſertiones Tuae veritatem immerito pelliciar. Nunc, vbi intelligo, in vacuo id experimenti factum non eſſe: gratiſſimum eſt, ſolui me moleſta neceſſitate explicandi illud phaenomenon. Et quando addis, neque id Tua ſententia fieri omnino poſſe in vacuo: Id ita interpretor, vt neges tantum experimenti in vacuo ſucceſſum, non ipſam tentaminis in vacuo faciendi poſſibilitatem. Equidem inſtitui id experimentum ipſa illa, qua Petropolin reliqui, die $\frac{16}{27}$ Ianuarii, neque me facti poenitet. Recte dicis, non ſuccedere experimentum in vacuo: atque ita excutis vnicam illam, quam Tuae expoſitioni cum aliqua animi fiducia oppoſui, difficultatem, magna cum mea voluptate.

Experimenti autem mei, vt et Lectoribus de illo conſtet, haec ratio fuit. Tubulum inaequaliter amplum bacillorum ope ad vitrum aqua plenum ſic aptaui, vt erectus conſiſteret ſibi relictus, et inter bacillos ſurſum trahi et deorſum poſſet recedere. Eidem tubulo brachium affixi deorſum inclinatum. Atque haec ſingula concluſi ſub campana ex earum genere, quae ſeruiunt motibus in vacuo excitandis. Tum vero filum aeneum, quod ſuperiorem eiusmodi campanarum partem tranſire ſolet, ita inſtruxi brachio ſuo, vt facta rotatione fili guttula ex brachio pendens ſummitatem fiſtulae attingeret, et ingrederetur; vtque attolli fiſtula ex aqua ſubiecta poſſet ope brachiorum fili aenei et tubuli. Exhauſto igitur aere, rotaui filum, vt guttula aquae fiſtulam vitream ingrederetur: Sublatoque altius tubulo vidi vtramque aquam deorſum labi, ſupremam in anguſtiori fiſtula, et inferiorem in tubulo ampliore. Succeſſit enim promtius id phaenomeni, quo minor aeris reſidui ſuſpicio fuit. Ceterum in ea feſtinatione non potui omnia perſequi ex voto. Igitur haec obiter dicta velim ſic accipi, vt aliis incitamento ſint, ſi qui repetendum id tentamen iudicent.

IV.

Supereſt adhuc Viro Cl. ſcrupulus vnus circa idem experimentum, cum in aere perficitur.

Quaerit enim, (vid. Fig. 13. Tab. XVII. laudatae diſſertationis) *Cur nulla ſit mentio peripheriae inferioris* D *guttulae* AB? *Annon dici poteſt, quantum guttula* A *ſurſum trahitur a contractu peripheriae ſuperioris, tantundem trahi illam quoque deorſum a contactu inferioris: deſtruere igitur ſe inuicem contrarias tractiones, et rem omnem reſolui in peripheriam* FG, *quae non ſufficit altitudini* FB? *An omnino negligi debet haec ſuperficies* D *deorſum trahens? et, cur eo caſu altitudo aquae non ſit maior, ob duas ſuperficies attrahentes in* A *et in* FG? *An peripheria* FG *ſurſum trahens, et peripheria* D *deorſum vrgens ſemper ſibi aequiualent? et quae cauſa eſt, vt amplior* FG *non pro ſua diametro trahat, ſed pro altera in* D *aut vice verſa?* &c. Sentio acumen argumenti, vnde negandum video *altitudinem vtriusque aquae ſimul ſumptam reſpondere altitudini, quae conuenit tubulo anguſtiori.* At iſta verba ex Viri Cl. phaenomeno 49. ſumpta nullibi apud nos reperiuntur, quippe quibus propoſitum erat ope praedicti experimenti, non quidem definire ad quantam altitudinem ſuſpenderetur aqua, quod iam aliis experimentis ſatis erat compertum, ſed oſtendere, contra ſententiam praedicti Celeberrimi Philoſophi, aquam quantacunque ſuſpenderetur, virtute attractionis peripheriae ſuperioris ſuſpendi. Nihil itaque erat neceſſe aut peripheriae inferioris guttulae, aut peripheriae FG facere mentionem. Iam vero, quoniam

niam hic ſcrupulus Cl. Bülffingero obortus eſt, et alios morari poteſt, operae pretium erit earum quoque Peripheriarum vires paullo attentius conſiderare. *

Hic vero ante omnia animaduertendum eſt, multo ampliorem eſſe peripheriam annularem inferiorem guttulae peripheria ſuperiore eiusdem, quod tubus, coni in modum, ſenſim vergat ex acumine capillari in amplitudinem ſatis conſpicuam. Quod ſi non conicam, ſed cylindricam eſſe contigerit ipſam tubi extremitatem, labetur guttula deorſum per minimum ſpatium, donec ſuperior eius ſuperficies in parte cylindrica conſtituta fuerit, et inferior ſuperficies eiusdem in latiori vergentis tubi peripheria ſubſiſtat. Peripheria itaque guttulae inferior trahet quidem aquam deorſum; ſed quanto latior eſt peripheria ſuperior, tanto minus fortiter aquam deorſum trahet, quam ſuperior eandem trahit verſus ſuperiora. Porro peripheria FG, quae ex omnibus latiſſima eſt, et ipſa aquam ſurſum trahit, ſed omnium debiliſſime. Sit ergo *a* altitudo, ad quam peripheria ſuperior aquam ſuſpenſura ſit in tubo cylindrico; ſint

* Gaudeo profecto, Virum Praeſtantiſſimum data hac occaſione ſic vſum eſſe, vt et hoc argumentum examinauerit. Optime illata ſunt, quae hic ſubiicit: Nec illa ab experimentis abludere confido. Nondum tamen inſtituere examen licuit, verſanti in itinere. Illud ſaepe expertus ſum, in tubulis ſic ſatis Cylindricis ſummam columnarum aquae vtcunque interruptarum exhibuiſſe altitudinem vel eandem, vel paulo maiorem ea, quae fuerat columnae contiguae. Praeſtat autem, ea ſingula repetitis experiri vicibus. Tum vero, ne ſuſpenſos teneam *Lectores*, ſilentium meum capi pro aſſenſu velim, Si praeter ſpem Iurinianam et meam res cadat, id ſequenti Volumine breuiter indicabo.

ſint etiam *b* et *c* altitudines , ad quas peripheria inferior guttulae , et peripheria FG aquam ſublaturae ſint reſpectiue in tubis itidem cylindricis, pro ratione reciproca harum peripheriarum. Hinc dabitur altitudo aquae ſuſpenſae in tubo noſtro inaequali, demendo ex altitudine *a* differentiam altitudinum *b*,*c*.

Si iſta , quod ſperamus Cl. Bülffingero ſatisfecerint , pollicemur nobis, pro candore et aequitate Viri humaniſſimi , eum in poſterum explicationem horum phaenomenωn non amplius pro hypotheſi , ſiue futili ingenii commento , *

* Ignoſce Vir Nobiliſſime , ſi quid probri eſt in voce hypotheſeos Ego hypotheſin non interpretor futile ingenii, commentum : ſed honeſta appellatione dico hypotheſin Cl. Iurini de Tubis Capillaribus , quemadmodum omnes Eruditi dicunt ex. gr. In hypotheſi Gallilaei de grauitate Naturali curua proiectorum in vacuo eſt parabola ; vel , in hypotheſi Copernica axis terrae motae eſt axi mundano parallelus. &c

Quandoquidem vero nunc ſententiam Vir Doctiſſimus meam requirit, ſaluo peritiorum iudicio , ita mihi videtur. 1) Nullum ego de Capillaribus experimentum noui, quod huic expoſitioni repugnet. 2) Non dubito , quin ſpecialia omnia poſſint ad hoc generale attractionis phaenomenon reduci, et ex illo explicari. 3) Non intercedo, ſi quis generalem corpuſculorum minimorum ad ſe inuicem acceſſum ſtatuat, Neque 4) vocem attractionis odi ! Modo 5) Leges illius attractionis pro ſingulis corporum ſpeciebus circumſpecte eruantur ex phaenomenis , vti hic factum eſſe a Cel. Iurinio vidimus. Tum vero 6) quemadmodum pro mea coniectatione generalis corpuſculorum acceſſus pendet ab actione fluidi ſubtilis , cuius leges nondum exploratae ſunt : Ita 7) in ſpecialibus caſibus tentandum puto, annon inueſtigari cauſſa phyſica poſſit , quae attractionem illam, ex. gr. aquae ad vitrum praeſtet. Facit hoc 8) ad plenitudinem , ſi non conuictionis , ſaltem acquieſcentiae in data phaenomenorum ſolutione. Ita igitur 9) in Cel. Iurini expoſitione nihil reprehendo. Optime de hoc argumento meritus eſt , dum ſpeciale phaenomenon ad generalem naturae conſuetudinem feliciter exegit. Supereſt 10) ad ſolutionem perfectam, vt aliquando attractionis generaliter ſumtae cauſſam phyſicam , et leges, modum, menſurasque et conditiones applicationis ad ſpecialia philoſophi eruant. Id donec perfecerit poſterorum induſtria , fruamur praeſentibus , neque fraudemus laude ſua Viros eximios , quorum induſtria hactenus co profecimus , vt ex vno generali phaenomeno infinita intelligamus ſpecialia. Talem praedico Clar. Iurinum in praeſenti argumento.

ſed pro vera et indubitata eorundem Theoria habiturum.

Vnum monendum ſupereſt, admiſſum eſſe aliquid errati * in phaenomenis 22. et 49. laudatae Diſſertationis exponendis, quod Vir Celeberrimus ad quasdam experimentorum noſtrorum minutias minus attentus, experimenta duo diſſimilia pro ſimilibus habuerit. Id vero ipſe vel per ſe, vel ex antedictis facile correcturus eſt.

---

* Recte mones, Vir praeſtantiſſime! Differentiam intercedere inter phaenom. 22. et 49. ex ſuperioribus Tuis nunc intelligo: illam nempe, quae pertinet ad falſam de experimentis in vacuo factis perſuaſionem, de qua diximus ad §. 3. Eam vero culpam pſe a me amouiſti, et tranſtuliſti in alium. Atque id candoris eſt, qualem ſaepe inter Eruditos deſideramus. Ego gratias Tibi, Vir Eximie, publicas ago, atque hoc Tuum exemplum et mihi et aliis ad imitationem propono. Libero Te etiam ab obiectionibus §. LIV. phaenom. 50. quas falſae illius perſuaſioni filias eſſe luculenter patet. Vale, et ſcientias, vti facis, porro auge.

CLAS-

CLASSIS
TERTIA
CONTINENS
HISTORICA
ET
CRITICA

CHRONOLOGIA SCYTHICA VETVS.

T. S. B.

INſtituenti mihi priſcam memoriam rerum Scythicarum litteris mandare, et tradendi quemuis rumorem et per errorem corrupta arguendi iuſta cauſſa fuit. Originem gentis, vt in compendio dicam quae prolixe a me ſunt explicata, ſic fere informatam animo habeo. Maiores eorum ab Caucaſo Armeniae, primo auſtrum, poſtea orientem petiiſſe, ita vt a ſiniſtris haberent littora Caſpia, denique flexiſſe borapelioten et in orientalibus Volgae regionibus conſediſſe: hic vero illam inconditam et diſperſam multitudinem, mille annis ante Darii expeditionem Scythicam, (Herodotus *τὰ σύμπαντα εἶναι χιλίων, οὐ πλέω, ἀλλὰ τοσαῦτα*) circiter A. P. I. 3200 in vnum corpus et rem publicam coiiſſe, Tar-

gitao quodam, viro principe et ſapiente ſummam rei moderante, nomenque vniuerſos Scolotorum, tamquam *rerum dominos* dicas, ſuſcepiſſe: diuiſos autem eſſe inter populos, *Paralatas*, ſeu regias familias, *Auchatas* et *Catiaros* ſeu *Traſpies*. Iisdem temporibus Cimmerios tenuiſſe regiones Cisuolganas ad Boryſthenem vsque et Tiram: Scolotos autem vexatos ab Iſſedonibus,(Iſſedones enim a finitimis populis et maxime ab Arimaſpis vrgebantur) traieciſſe Volgam et pulſis Cimmeriis, non modo has terras, illarum loco, quas Iſſedonibus reliquerant, occupaſſe, verum etiam impreſſionem feciſſe in ſuperiorem Aſiam atque ab illo tempore, fama eorum in ſagittando Graeciam peruagante, dictos fuisſe a Graecis *Scythas*, hoc eſt *Sagittarios*. Illa enim in arte adeo excellentes fuere, vt Cyaxares rex Medorum Scythis liberos ſuos inſtituendos tradiderit, quod poſtea amplius declarabo, et Graeci vero Herculem ſuum cenſuerint haud aliunde ſagittandi artem ſibi comparaſſe, quam a Scythis. Quare Theocritus: (1)

> Αμφιτρυωνιάδας δὲ ταρασσόμενος περὶ παιδὶ
> Ὤχετο, Μαιωτισὶ λαβὼν εὐκαμπέα τόξα
> Καὶ ῥόπαλον

Μαιωτισὶ Scholiaſta recte Σκυθισὶ. ἐχρῆτο δὲ Ηρακλῆς τοῖς Σκυθικοῖς τόξοις, διδαχθεὶς παρά τινος Σκύθου Τευτάρου, ὡς ἱστορεῖ Ηρόδοτος καὶ Καλλίμαχος. Morem ipſum ſagittandi Neocles Grammaticus vetus

(1) Idyllo ΙΓ. v. 55.

tus in Euſtathii parecbolis Homericis (2) tradidit, λέγων, Σκυθικὴν εἶναι τὴν τῆς νευρᾶς ἕλξιν, πρὸς τὸν ὦμον αὐτήν φησιν ἑλκυσθῆναι νόμῳ Σκυθῶν, *cum dicere vult, Scythicum morem trahendi chordam arcus, chordam dicit verſus humerum trahi conſuetudine Scythica.* Ceterum et Plato in Legibus ait: (3) τῶν Σκυθῶν νόμος, οὐκ ἐν ἀριστερᾷ μὲν τόξον ἀπάγων, ἐν δεξιᾷ δ' οἰστὸν προσαγόμενος μόνον, ἀλλ' ὁμοίως ἑκατέροις ἐπ' ἀμφότερα χρώμενος, *Scytharum more, non ſiniſtra ſola arcum tractari et dextera imponi ſagittam, ſed ad vtrumque officium vtramque manum aſſuefactam eſſe.* Et alibi (4) Plato: non minus cominus congredientes ita pugnare Scythas, quam fugientes. Hanc opinionem ſecutus ſum, vt vero maxime conſentaneam, quippe quae ab ipſis Scythis in hunc modum prodita eſt, et quam minimum vanitatis habet. Nam quae Trogus Pompeius et ex eo Iuſtinus oſtentandae cauſſa eloquentiae, non ex Scytharum ſententia, ſed ex ingenio aut ſuo aut Graeculorum, de antiquitate gentis prodigioſa declamarunt, haec, quod idoneis auctoritatibus ad fidem non ſunt confirmata, promte et vno verbo refutaueris. Quid Scythae ipſi apud Herodotum? (5) Ὡς δὲ Σκύθαι λέγουσι, νεώτατον ἁπάντων ἐθνέων εἶναι τὸ σφέτερον, *ſuam gentem omnium gentium nouiſſimam eſſe, Scythae dicunt.*

Attamen Graeci quidam apud Herodotum (6)

(2) p. 715. ed. om. (3) l. VII. p. 571. ed. Henrici Petri (4) Laches Platonis p. 256. (5) l. IV. c. 5. (6) l. IV. c. 8.

et Diodorum Siculum, (*) diuerſa ab opinione noſtra et Herodoti ipſorumque Scytharum relationibus prodiderunt, quae vt ſcenae comparata fuiſſe videntur, ita neque magni facio, neque plane contemno. Herculem, aiunt, in longa peregrinatione ex Hiſpania Geryones boues ducentem perueniſſe in Scythiam, inhabitabile et derelictum a mortalibus ſolum: labore autem et frigore confectum ſuper illa leonina pelle quietem cepiſſe: ſoluto ſomno nusquam veſtigia boum apparuiſſe, nedum ipſas, donec incertus animi Hercules in Hylaeam venit: iſthic eum vidiſſe in ſpecu ſemiuirginem, quae extremis membris in draconem deſierit, ex qua cum quaereret, num quas boves errare in agro ſuo vidiſſet, reſponſum tuliſſe, ſecum illas eſſe, neque redditum iri, niſi pro officio et mercede: mercedem concubitum petiiſſe, Herculem, conditionem accepiſſe. Illam deinde, vbi ſe amplius vna prole impletam ſenſit, rogaſſe Herculem, quid fieri vellet, cum editi in lucem eſſent liberi? Herculem tradidiſſe arcum (duos enim ante id tempus geſtabat, inquiunt homines profecto aſtuti) et ζωςῆρα, ἔχοντα ἀπ᾽ ἄκρης συμβολῆς Φιάλην χρυσέην, *cingulum, a quo patera aurea in ipſa fibulae commiſſura pendebat*, his cum mandatis, qui filiorum arcum iſtum tendere poſſet, eoue ſe cingulo conſtringere, vti is cum matre maneret, ceteri abirent in colonias. Natos ex hoc diuino monſtro filios tres

(6) l. II. c. 43.

tres, *Agathyrſum*, *Gelonum* et *Scytham*. Illis alias in terras dimiſſis, a Scytha eſſe Βασιλῆας ſeu *Regios* prognatos, qui Herculeae ſtirpis ſignum, phialam de pelliceo cingulo pendentem geſtarint. Diodorus Siculus addit, ex Scythae nepotibus *Palum* et *Napum* genitos, regum potentiſſimos, capita Palorum Naporumque exſtitiſſe. Hos puto Diodorum in animo habuiſſe, qui paullo ante eum cum Mithridate res geſſerunt. Palacus enim Scytha, pro quo Palum dixiſſe videtur Diodorus, cum quinquaginta fratribus eo in bello celebratur. Ab hac fabula Stephanus Byzantius ſua illa accepit: Σκύθαι ἀπὸ Σκύθȣ παιδὸς Ηρακλέȣς. Et ne mediocriter iocularis eſſet, addit: τινὲς δ᾽ ἀπὸ τȣ͂ σκύζεσθαι, ὀργιλώτατοι γὰρ, *alii dictos cenſent a* σκύζεσθαι *iraſci: ſunt enim perquam iracundi.* Non magis hoc verum, quam quod Thracicae ſtirpis gentem fuiſſe contendit. At totam illam fabulam, Scythis ipſis ignotam, a Graecis circa Pontum coloniis excuſam et pictam eſſe, Herodotus teſtatur. Id eo factum opinor, quod Hercules a vetuſtiſſimis ad Pontum coloniis, vna cum Hyllo, filio perquam religioſe colebatur. Et erat tum genus quoddam cultus, vt quam ampliſſime et vaniſſime de diis heroibusque, quae neque facta, neque fieri potuerunt, tamen comminiſcerentur, veluti laus ex vero hauſta nihil admirationis haberet, niſi ſi eſſet magno quodam et impudenti mendacio coinquinata. Nunc occaſio fallendi ex quo ducta ſit, cognoſcite. Graeci ad Pontum intellexerant ex ſermone Scytharum, quod Herculis aetate nulli adhuc

Scy-

Scythae regiones inter Boryſthenem et Tanaim tenuerint, eo ſolitudinem fuiſſe ferebant. Praeterea hoc quoque in Graecis peruulgatum erat, Agathyrſos et Gelonos vetuſtas fuiſſe colonias a reliquo Scytharum corpore, quocumque caſu ſeiunctas: et denique Scythas Paralatas phialam cum cingulo pelliceo, nobilitatis inſignia, gerere. Aulus Gellius ex Eraſiſtrati, qui Ariſtotelis philoſophi e filia nepos fuit, Διαιρέσεων primo libro hoc fragmentum produxit: (7) *ἐθισμένοι δ' εἰσὶ καὶ οἱ Σκύται, ὅταν διά τινα καιρὸν ἀναγκάζονται ἄσιτοι εἶναι, ζώναις πλατείαις τὴν κοιλίαν διασφίγγειν, ὡς τῆς πείνης αὐτοὺς ἧττον ἐνοχλούσης. σχεδὸν δὲ καὶ ὅταν πλήρης ἡ κοιλία ᾖ, διὰ τὸ κένωμα ἐν αὐτῇ μηδὲν εἶναι, διὰ τοῦτο οὐ πεινῶσιν, ὅταν δὲ σφόδρα συμπεπτωκεῖα ᾖ, κένωμα οὐκ ἔχει.* *Conſueuerunt autem Scythae, cum per aliquot tempus inediam perſerendi neceſſitas eſt, latis zonis ventrem conſtringere, veluti ſic eis ſames minori moleſtiae ſit: ſorte etiam cum venter repletus eſt, quia nihil in eo inane eſt, idcirco non eſuriunt, cum autem valde conſtrictus eſt venter, inane nihil habet.* Nunc quoque inter Lithuanos, inter quos aliquamdiu verſatus ſum adoleſcens, cingulum pelliceum latum multum ambitionis et faſtus habet atque nobiles homines et divites praefectosque eius nationis ab infima faece plebis diſcernit. Haec quaſi materia et caementa fuerunt, ex quibus illi artifices Graeculi longam fabulam, ſed ſine calce exaedificarunt. Diodorus Siculus autem in Scythicis partem Herodotum ſequitur, partem alios:

(7) l. XVI. c. 3.

lios: ea, cum inter ſe vehementer diſſentiunt, vnum in corpus redacta monſtrum quoddam pariunt, *informe, ingens, cui lumen ademtum.* Mirum adeo non eſt, ſi nihil in Diodori Scythicis reperias quod ad temporum rationes conſtituendas non repugnet. Sed redeamus ad noſtram de Scythis opinionem.

Igitur Scythas, vrgentibus a tergo potentioribus populis, nouas ſedes traiecto Volga quaeſiuiſſe, pulſisque Cimmeriis, regionem omnem a Tanai ad Boryſthenem occupaſſe diximus. Poſtquam etiam illius regionis ſitum deſcripſimus, id nunc agemus, vt, in quam aetatem haec Scytharum in Cisuolganas prouincias impreſſio, incidat, explicatum habeamus. Hieronymus in epitaphio Fabiolae, Scythas ſub Dario Medo in Aſiam excurſionem feciſſe autumat. Bene hoc, ſi Darii Medi omnis memoria non multo eſſet obſcuriſſima. Nos, quantum poteſt, non recedemus ab Herodoto, diligentiſſimo inueſtigatore antiquitatis, ex quo nobis videmur temporis illius rationem comperiſſe. Et perſequemur deinde cetera quoque, quae ad omnem Scythicam chronologiam poterunt probabili ingenio definiri. Vt explicatis temporum ordinibus, vno in conſpectu omnia videres, totam illam chronologiam κατὰ πλάτος exhibui, tum quibus rationibus ductus fuerim, oſtendam.

A. P. L.

A. P. I.	Ante C. N.	A. Nabon.	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4070	644	104 Ian. 31	34. 1	14 *Phraortis regis*	37 *Ardyos regis*	29 *Pſammetichi regis*
4071	643	105	2	15	38	30
4072	642	106	3	16	39	31
4073	641	107	4	17	40	32
4074	640	108. 30	35. 1	18	41	33
4075	639	109	2	19	42 *Cimmerii a Scythis pulſi Aſiae cherrhoneſum invadunt.*	34
4076	638	110	3	20 *Madyas Protothyae filius rex Scytharum*	43	35
4077	637	111	4	21 *Scythae per Caſpia clauſtra Aſiam ſuperiorem petunt.*	44	36
4078	636	112 29	36. 1	22	45	37

A. P. I.	Ante C. N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4079	635	113	2	*CYAXARES Phraorte Babyloniis caeſo, patris cladem vlturus, Ninum vrbem obſidet. Scythae vero eum adorti praelio vincunt*	46	38
4080	634	114	3	2	47	39
4081	633	115	4	3	48	40
4082	632	116. 28	37. 1	4	49	41
4083	631	117	2	5 *Scythae Palaeſtinam aggrediuntur.*	*SADYATTES*	42
4084	630	118	3	6	2	43
4085	629	119	4	7	3	44
4086	628	120. 27	38. 1	8	4	45
4087	627	121	2	9	5 } *Bellum Cimmericum.*	46
4088	626	122	3	10	6 }	47

A. P. I.	Ante C. N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4089	625	123	4	11	7 *Bellum cum Mileſiis*	48
4090	624	124. 26	39. 1	12	8	49
4091	623	125	2	13	9	50
4092	622	126	3	14	10	51
4093	621	127	4	15	11	52
4094	620	128. 25	40. 1	16	12	53
4095	619	129	2	17	*ALYATTES*	54
4096	618	130	3	18	2	*NECVS*
4097	617	131	4	19	3	2
4098	616	132. 24	41. 1	20	4	3
4099	615	133	2	21	5	4
4100	614	134	3	22	6 *Bellum cum Mileſiis compoſitum*	5
4101	613	135	4	23	7	6
4102	612	136. 23	42. 1	24	8	7
4103	611	137	2	25	9	8

4104

A. P. I.	Ante C N I	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4104	610	138	3	26 *Aut extremo anno, aut ſequentis anni initio Scythae ex tota Aſia ſuperiori a Medis pulſi, domi bellum ſeruile inueniunt. Orta inter Scythas diſſenſione, quidam a ceteris oppreſſi, ad Cyaxarem fugiunt ſupplices.*	10	9

A. P. I.	Ante C. N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4105	609	139	4	27 *Cyaxares Ninum obſidet et capit. Scythae ſupplices a Cyaxare fugiunt ad Alyatten.*	11	10
4106	608	140. 22	43. 1	28 *Bellum inter Medos et Lydios ortum ob Scythas transfugas.*	12	11
4107	607	141	2	29 *Caluiſii eclipſis*	13	12
4108	606	142	3	30	14	13
4109	605	143	4	31	15	14
4110	604	44. 21	44. 1	32	16	15

A P. J.	Ante C.N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4111	603	145	2	33 *Eclipſis* XVII *Maii inter hor.* 9-10. *pugnam inter Medos et Lydios dirimit. Pax inita*	17	16
4112	602	146	3	34	18 *Cimmerii eiiciuntur ex Aſia intra Halyn fluvium.*	17
4113	601	147	4	35 *Vſſerii eclipſis*	19	*PSAMMIS*
4114	600	148. 20	45. 1	36	20	2
4115	599	149	2	37	21	3
4116	598	150	3	38	22	4
4117	597	151	4	39 *Petavii eclipſis.*	23	5
4118	596	152. 19	46. 1	40	24	6

A. P. I.	Ante C. N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4119	595	153	2	ASTYAGES.	25	APRIES
4120	594	154	3	2	26	2
4121	593	155	4	3	27	3
4122	592	156. 18	47. 1	4 *Anacharſis Scytha Athena venit*	28	4
—	—	— —	— —	*Saulius Gnuri filius Anacharſidis frater rex Scytharum.*		
4123	591	157	2	5	29	5
4124	590	158	3	6	30	6
4125	589	159	4	7	31	7
4126	588	160. 17	48. 1	8	32	8
4127	587	161	2	9	33	9
4128	586	162	3	10	34	10
4129	585	163	4	11 *Eratoſthenis eclipſis Plinii eclipſis.*	35	11
4130	584	164. 16	49. 1	12	36	12

4131

A. P. I.	Ante C. N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4131	583	165	2	13 *Scaligeri eclipſis*	37	13
4132	582	166	3	14	38	14
4133	581	167	4	15	39	15
4134	580	168. 15	50. 1	16	40	16
4135	579	169	2	17.	41	17
4136	578	170	3	18	42	18
4137	577	171	4	19	43	19
4138	576	172 14	51. 1	20	44	20
4139	575	173	2	21	45	21
4140	574	174	3	22	46	22
4141	573	175	4	23	47	23
4142	572	176. 13	52. 1	24	48	24
4143	571	177	2	25	49	25
4144	570	178	3	26	50	*AMASIS*
4145	569	179	4	27	51	2
4146	568	180. 12	53. 1	28	52	3
4147	567	181	2	29	53	4
4148	566	182	3	30	54	5
4149	565	183	4	31	55	6
4150	564	184. 11	54. 1	32	56	7
4151	563	185	2	33	57	8
4152	562	186	3	34	CROESVS	9
4153	561	187	4	35	2	10

A. P. I.	Ante C.N.	A. Nabon	Olymp.	Reges Mediae	Reges Lydiae	Reges Aegypti
4154	560	188. 10	55. 1	CYRVS	3	11
4155	559	189	2	2	4	12
4156	558	190	3	3	5	13
4157	557	191	4	4	6	14
4158	556	192. 9	56. 1	5	7	15
4159	555	193	2	6	8	16
4160	554	194	3	7	9	17
4161	553	195	4	8	10	18
4162	552	196. 8	57. 1	9	11	19
4163	551	197	2	10	12	20
4164	550	198	3	11	13	21
4165	549	199	4	12	14	22
4166	548	200. 7	58. 1	13 *Cyrus Sardes cepit* Reges Perſiae	*Sardes captae*	23
4167	547	201	2	14		24
4168	546	202.	3	15 *Neuri relictis ſedibus, Boryſthenem traiiciunt*		25
4169	545	203	4	16		26
4170	544	204. 6	59. 1	17		27
4171	543	205	2	18		28
4172	542	206	3	19		29
4173	541	107	4	20		30

4174

A. P. I.	Ante C. N.	Olymp.	Reges Perſiae	Reges Aegypti
4174	540	60. 1	21	31
4175	539	2	22	32
4176	538	3	23	33
4177	537	4	24	34
4178	536	61. 1	25	35
4179	535	2	26	36
4180	534	3	27	37
4181	533	4	28	38
4182	532	62. 1	29	39
4183	531	2	30 *Cyrus Scy-*	40
			thas et Maſ-	
			ſagetas bello	
			petit	
4184	530	3	*CAMBY-*	41
			SES	
4185	529	4	2	42
4186	528	63. 1	3	43
4187	527	2	4	44
4188	526	3	5 *Cambyſes in-*	*PSAMME-*
			vadit Aegy-	*NITVS A-*
			ptum	*maſi deſuncto*
4189	525	4	6	*ſuccedit, Cam-*
4190	524	64. 1	7	*byſe in armis*
4191	523	2	*Cambyſes cum*	*appropinquan-*
			regnaſſet 7.	*te.* **Regno**
			annos 5. men-	*exuitur.*
4192	522	3	*ſes, decedit.*	
4193	521	4	*DARIVS HYSTASPIS*	
4194	520	65. 1	2	

A. P. I.	Ante C. N.	Olymp.			
4195	519		2	3	
4196	518		3	4	
4197	517		4	5	
4198	516	66.	1	6	*Indathyrſus Saulii filius, rex Scytharum Nomadum, iam ſenex.*
4199	515		2	7	*Darius Babylonem cepit, contra Scythas mouit.*
4200	514		3	8	
4201	513		4	9	*Arianthas rex Scytharum Nomadum*
4202	512	67.	1	10	
4203	511		2	11	
4204	510		3	12	
4205	509		4	13	
4206	508	68.	1	14	
4207	507		2	15	
4208	506		3	16	
4209	505		4	17	
4210	504	69.	1	18	
4211	503		2	19	
4212	502		3	20	
4213	501		4	21	
4214	500	70.	1	22	
4215	499		2	23	
4216	498		3	24	

4217

A. P. I.	Ante C. N.	Olymp.			
4217	497		4	25	
4218	496	71.	1	26	
4219	495			27	
4220	494		3	28	
4221	493		4	29	
4222	492	72.	1	30	*Clades Perſarum ad Marathona*
4223	491		2	31	
4224	490		3	32	
4225	489		4	33	
4226	488	73.	1	34	
4227	487		2	35	
4228	486		3	36	
4229	485		4		*XERXES*
4230	484	74.	1		*Herodotus natus*
4231	483		2		
4232	482		3		
4233	481		4		
4234	480	75.	1		
4235	479		2		*Xerxis expeditio in Graeciam*
4236	478		3		*Pugna ad Plataeas et Mycalen*
4237	477		4		
4238	476	76.	1		*Aripithes rex Scy-tharum Nomadum*
4239	475		2		
4240	474		3		
4241	473		4		

A. P. I.	Ante C. N.	Olymp.		
4242	472	77.	1	
4243	471		2	
4244	470		3	
4245	469		4	
4246	468	78.	1	
4247	467		2	
4248	466		3	
4249	465		4	
4250	464	79.	1	
4251	463		2	
4252	462		3	
4253	461		4	
4254	460	80.	1	
4255	459		2	
4256	458		3	
4257	457		4	
4258	456	81.	1	*Spargapithes rex Agathyrſorum*
4259	455		2	*Sciles Aripithae filius rex Scytharum Nomadum*
4260	454		3	
4261	453		4	
4262	452	82.	1	
4263	451		2	
4264	450		3	*Octamaſades Aripithae filius, rex Scytharum Nomadum.*

4265

A. P. I.	Ante C. N.	Olymp.	
4265	449	4	
4266	448	83. 1	
4267	447	2	
4268	446	3	*Herodotus, vbi hiſtoriam ſuam in Panathenaicis initio Sextilis recitauit, Thurios proficiſcitur, aut hoc autumno, aut ſequentis anni vere.*
4269	445	4	
4270	444	84. 1	
4271	443	2	
4272	442	3	
4273	441	4	
4274	440	85. 1	
4275	439	2	
4276	438	3	
4277	437	4	
4278	436	86. 1	
4279	435	2	
4280	434	3	
4281	433	4	
4282	432	87. 1	
4283	431	2	*Belli Peloponneſiaci annus primus*
4284	430	3	
4285	429	4	

	Ante C. N.	Olymp.	
4286	428	88. 1	
4287	427	2	
4288	426	3	
4289	425	4	
4290	424	89. 1	*Sitalces rex Thracum obiit.*
4191	423	2	
3292	422	3	
4293	421	4	

Ad inueſtigandam Scytharum chronologiam hos characteres ab Herodoto propoſitos oculis et animo ſubiecimus. Ardys Lydorum rex erat, cum Cimmerii a Scythis pulſi per Caucaſea clauſtra Cherrhoneſum illam magnam, quam Graeci ſine adiecto Aſiam nuncupabant, peterent, Sardes praeter acropolin occuparent, aliarum illius regionis vrbium Graecarum agros diriperent et Cherrhoneſum tenerent Sinopicam. (8) Alyattes Ardyos nepos Cimmerios Aſia expulit omni, ὗτος, inquit Herodotus, Κυαξάρῃ τε τῷ Δηιόκεω ἀπογόνῳ ἐπολέμησε καὶ Μήδοισι, Κιμμερίους τε ἐκ τῆς Ασιης ἐξήλασεν, ut, ſi verborum ordinem ſequamur, Cimmerii pulſi ſint poſt bellum cum Cyaxare geſtum. A Sadyatte quidem iam antea Cimmeriorum ferocia repreſſa fuiſſe videtur, ſed cur non obtrita ab eo prorſus fuerit,

(8) Herodotus l. I. c. 6. et 15. l. IV. c. 12.

rit, ex fragmento Nicolai Damaſceni intelligo. (9) Ait enim is: ὅτι Σαδυάττης ὁ Λυδῶν βασιλεὺς ἦν μὲν τὰ πολέμια γενναῖος, ἄλλως δ᾽ἀκόλαςος, *Sadyattes Lydorum rex bello quidem ſortis erat, attamen idem voluptatum auceps.* Amores eius Nicolaus Damaſcenus narrat. Talis cum eſſet Sadyattes, mirum non eſt, ſi contentus ab Lydiae finibus Cimmerios eſſe reiectos, tamen intra Halyn fluuium Sinopicam cherrhoneſum tenere paſſus eſt. Sex autem extremis annis Sadyattes, etiam bello cum Mileſiis diſtrictus fuit, ne Cimmeriis moleſtus eſſet: quod bellum Alyattes, filius, aut potius, quoniam ad modum puer erat, tutores eius, ſexto anno regni compoſuerunt. Tum vero Alyattes, aut maior aliquantum annis, ſuperiores Aſiae huius prouincias inuaſiſſe videtur. Per tot et tam bellicoſas gentes lentius peruenit ad Cimmerios in cherrhoneſo Sinopica. Croeſus filius paternae virtutis aemulus Lycios, Cilices aliosque populos in interioribus regionibus eiusdem Aſiae deuicit et Graecas in ea vrbes tributarias fecit. Tum vero Croeſus Aſiam omnem etiam intra Halyn occupauit. Ex quo intelligimus quoque, primum quidem, Alyatten nondum omnem intra Halyn Aſiam tenuiſſe, cum contra Cyaxarem bellum gereret: et bello illo confecto denique Cimmerios ab Sinopica cherrhoneſo ad Halyn exterminatos eſſe.

Poſtquam Cimmerii a Scythis pulſi, in Aſiam per Caucaſea clauſtra irruperunt, Scythae, compoſitis in noua regione, inter Boryſthenem et Tanaim rebus, et vxoribus ſeruisque cum reliqua imbelli multitu-

(9) Exçerpta Pejresciana p. 453.

titudine iſthic relictis, duce Madya Protothyae filio in Aſiam vsque Cimmerios perſequi conſtituerunt. Cum autem a via aberrarent, per Caſpia clauſtra in Mediam, regionem a Cimmeriis fugitiuis auerſam, inciderunt. Erat eo tempore Medorum rex Cyaxares. Eius Pater Phraortes bello cum Aſſyriis geſto ceciderat. Is igitur vindicandae cladis et ignominiae cauſſa Ninum vrbem tum maxime oppugnabat, (10) cum de impreſſione Scytharum ad eum nuncius perferret. Ducto aduerſum nouos hoſtes exercitu, Scythicis armis ſuccubuit. Scythae Aſia ſuperiori (ſic Graeci omnem regionem vltra Euphratem vocabant) potiti, Palaeſtinam inuaſerunt. Pſammitichus Aegyptiorum rex, qui tum in Palaeſtina erat, Scythas muneribus et officiis mitigatos a ſe dimiſit. Pars maior Aſcalonem praeteruecti ſine maleficio, pauci in extremo agmine fanum Veneris Caeleſtis ſpoliarunt. Poſtquam annos octo et viginti Aſiae incubuerant omniaque laſciuia et rapinis, ne dicam tributis, diuexauerant, Cyaxares atque Medi Scytharum inſignem multitudinem hoſpitio comiter acceptos et liberaliter inuitatos trucidarunt inter menſas: ceteri vi atque repentino terrore conſternati ex Aſia profugerunt, (1) et domi bellum inuenere cum ſeruis, qui coniugiis dominorum illuſerant, ductis uxoribus, quae maritorum diuturnum deſiderium impatientius ferebant et cum liberis ſtirpe ſeruili. (2) Sub id

(10) Herodotus l. I. c. 103. 104. l. IV. c. 12. l. VII. c. 20. (1) Herodotus l. I. c. 105. 106. (2) Herodotus l. IV. 1. Iuſtinus l. II. c. 3. 5.

id tempus quoque inter Scythas Nomadas orta ſeditione, (3) pars, quae factionibus erat impar in Mediam conceſſit ad Cyaxarem regem. Is Scythas ſupplices benigne accepit et in honore habuit, filiumque tradidit, quem et ſagittare et Scythice loqui docerent. Interiecto tempore, cum Scythae venatum exirent et nonnumquam domum redirent inanes, Cyaxares aſpere et cum contumelia veluti inertes tractabat. Homines libertatis vnice amantes, rem indignam rati, ſi pro mancipiis haberentur, vnum puerorum, quos cum filio regis inſtituendos acceperant, mactant, apparatumque, veluti ferinam, regi mittunt et conſcenſis equis ad Alyatten ſupplices profugiunt Sardes. Quos cum Alyattes Cyaxari petenti tradere nollet, bellum ortum eſt inter Lydos Medosque et varia fortuna geſtum. Sextus iſtius belli annus erat, cum in medio vtriusque exercitus certamine, caelo ſereno, obſcurata lux eſt, luna ſub orbem ſolis ſubeunte. Iones, qui in exercitu Alyattis militabant, id eo tempore futurum meminerant: praedixerat enim eis cauſſamque rei explicuerat Thales Mileſius. Lydi autem Medique conſternati ob repentinae noctis prodigium, non modo a praelio abſiſtunt, verum etiam de pacis conditionibus agunt et foedus faciunt, Syenenſi Cilice et Labyneto Babylonio arbitris. Firmandae pacis cauſſa Alyattes Arienin filiam Aſtyagi Cyaxaris filio deſpondit. Id praelium intra Halyn com-

(3) Herodotus l. I, c. 73.

miſſum videtur, cum Cyaxares omnem ſuperiorem Aſiam teneret, Alyattes vero intra Halyn, et ſatis magno interuallo ab illo flumine, opes ſuas terminaret, vt veroſimile ſit in finitimis vtriusque regni agris bellum eſſe geſtum, varia fortuna et aequata vtriusque populi potentia.

Haec ſunt momenta ad Scythicam chronologiam conſtituendam, quibus vt recte vtar, ſucceſſionem regum Mediae et Lydiae et Aegypti ex Herodoto explicandam eſſe video. Licet enim hoc loco Ioſephus Scaliger ab Herodoto paene conuitiis et denunciatione ſcaeui omnis nos abſterreat, (4) Diodori autem Siculi βασιλικὰς διφθέρας venditet, tamen obduramus et certo iudicio Herodotum viae ducem ſequimur. Illum enim Diodorum Scaliger ipſe cum iſtis diphtheris regiis alio in loco plorare iuſſit, (5) hic cur adeo inſanire putet, qui Diodorum ſpernunt, profecto non video. Non autem diffiteor, rem eſſe perdifficilem, ex Herodoto aliquod certum tempus ſic definire, vt non aliunde aſſumendum ſit aliquid, in quo facile fieri poteſt, vt ab eius vera opinione aberremus. Sed neceſſe eſt in eo auctore, vt hoc diſcrimen plerumque ſubeamus. Sic hoc loco ipſum fundamentum ſucceſſionis regum Mediae extrinſecus adſumendum eſt, quia Herodotus ipſe non poſuit. Ex Iulio Africano (6) inquam, qui Polybium, Diodorum Siculum, Thallum, Phlegontem, Caſtorem, alios omnes, auctores ſe habere prae-

(4) In canonibus iſagogicis p. 321. (5) In Fragmenta p. 42.
(6) In Euſebii praeparatione Euangelica p. 488.

praedicat, initia Cyri in primo anno Olympiadis LV. hoc eſt in annum periodi Iulianae 4154. extremum conferri oportere. Phlegon Trallianus aliqua ſua parte, et ſatis magna, adhuc exſtat, quod miror doctos viros fugere. Ioſephus Scaliger enim ab Iſaacio Caſaubono accepit ex ἀνεπιγράφῳ libro bibliothecae regiae Pariſienſis Ὀλυμπιάδων ἀναγραφὴν (7) eamque inter Graeca Euſebii edidit: cum in epiſtolis ad Iſaacium Caſaubonum, hunc ipſum Iulii Africani libellum eſſe contendit, in editione ipſa neſcio cur diſſimularit. Mirum quod quibusdam in mentem venit, Scaligerum hanc ἀναγραφὴν confinxiſſe: addidiſſe eum quaedam inuenio, minime laudabili diligentia. Henricus Doduellus in cyclis Graecis eidem Iulio Africano attribuit librum. (8) Nihil ſane eſt verius. At Phlegontem Trallianum eodem illo libro contineri, non ſenſit Scaliger et vehementer amiſſum deplorat. (9) Eſſe autem hunc Phlegontis, manifeſtum erit, ſi, quae Photius (10) περὶ τῆς Ὀλυμπιονικῶν καὶ χρονικῶν συναγωγῆς ex Phlegonte habet, ceteraque Phlegontis fragmenta conferas cum libro. Atque vt Iulius Africanus hunc ipſum Phlegontis canonem tanquam ſuum ſuſcepit et ad A. C. 221. Olymp. CCL. 1. ſeu Antoninum Ela-

(7) Scaligeri epiſtolae p. 251. ſeq. 261, (8) p. 743. „Africani, quod ſemel monuiſſe ſufficiat, praeſtantiſſimum fragmentum Olympionicarum Scaligero debemus, in Graecis ſuis Euſebianis. „ (9) De emendatione temporum p. 1. „ Quod ſi Thalli, Caſtoris, Phlegontis, Eratoſthenis canones „ exſtarent, nulla potius ratio haberetur librorum quorundam, qui hodie in „ penuria meliorum nobis in pretio ſunt. „ (10) Codice XCVII.

gabalum ſuppleuit, ita Phlegon videtur in hoc ſuo libro Eratoſthenis Cyrenaei Olympionicas conſeruatas ad Hadrianum vsque continuaſſe, vt Eratoſthenes ipſe Ariſtotelis. Argumento mihi fuere fragmenta in aliis ſcriptoribus conſiderata et collata cum hoc libro. Phlegon igitur et Iulius Africanus in hac *ἀναγραφῇ* ad Olympiadis LV. annum primum ita habent Κῦρος Περσῶν βασιλέυει, *Cyrus rex Perſarum.* Sed, vt ſupra monui, Phlegon Eratoſthenis Cyrenaei Olympionica tranſcripſit in librum hunc ſuum, vt multo viciniorem illis temporibus producere poſſimus teſtem Eratoſthenem, quam aut Polybius eſt, aut quisquam eorum, quos Tatianus et Iulius Africanus apud Euſebium citant. Immo Ariſtotelem dicere poteram, adhuc antiquiorem, cuius elenchum Olympionicarum Eratoſthenes quoque tranſcripſiſſe videtur. Is autem ex Perſarum diphtheris διὰ τῆς τοῦ Ἀλεξάνδρου μεγαλοπρεπέιας καὶ μεγαλοψυχίας ſua prodidit ad Eratoſthenem et Phlegontem. Euſebius quoque Iulii Africani teſtimonio vſus (Euſebius enim ipſe in Africani ſcripto illas Ariſtotelis et Eratoſthenis auctoritates non ſenſit) initia Cyri Olympiadis LV. 1. ponit et anno ſuperiori extrema Aſtyagis. Nam Iulius Africanus alio loco diſertius locutus, dixerat (1) Κῦρος Περσῶν ἐβασίλευσεν, ᾧ ἔτει Ὀλυμπιὰς ἤχθη νέ *eo anno regnare coepit, quo acta eſt Olympias* LV. vt plane A. P. I. 4154. demonſtretur, cuius aeſtate Olympias acta eſt, quod pluribus argumentis demon-

(1) apud Euſebium de praeparatione euangelica. p. 488.

demonſtrauit Ioſephus Scaliger in emendatione temporum. Si quis Xenophontis de Cyro fabulam ſequi malit, ſcitam illam et lepidam fabulam, quam Herodotum, is ſuo ingenio vtatur: ego comperiſſe mihi videor, ſcriptam eſſe delectandi cauſſa populi, quo ſibi victum quaereret Xenophon ad leuandam eſuriem. Cognoſce mecum Xenophontis fortunam et ſcripta, ſic meam opinionem minime reprehendes. Scio quidem, Scaligerum, quem ego virum ob ſingularem eruditionem magni facio et vnice diligo, extrema Aſtyagis in anno quarto Cyri ponere, ſed hac in cauſſa ab eo diſſentio. Non hic locus eſt, vt longam diſputationem et ab inſtituto alienam ingrediar, quae aliud argumentum et aliud tempus requirit. Igitur oportet nos A. P. I. 4154. reſpicientes, regum Medorum annos certis interuallis diſponere, vt ſunt ab Herodoto conſignati. Aſtyages inquit ille, (2) βασιλεύσας ἐπ' ἔτεα πέντε καὶ τριήκοντα praelio ſummo victus eſt a Cyro. Si annos integros in eo, vt in ceteris, numeremus, Aſtyages regnum iniit ante Olympiadis XLVI. 1. Ante eum Cyaxares regnauit annos quadraginta, (3) ergo regnare coepit ante Olympiadis XXXVI. 1. Phraortes annos duos et viginti Medos rexit, (4) itaque rerum potitus eſt Olymp. XXX. 3.

In Lydiae regum ſucceſſione clades Croeſi nobis quaſi cardo eſt. Id negotium ſimili ratiocinio conficitur. Phlegontis et Eratoſthenis illa Olympioni-

(2) l. I. c. 130. (3) l. I. c. 106. (4) l. I. c. 102.

ca, regni Lydii extrema ponunt ad Olymp. LVIII. 1. Κῦρος Σάρδεις εἷλε, *Cyrus Sardes cepit.* Ab his non valde diſcrepant Graeca excerpta Euſebiana, (5) quae hoc loco ducta ſunt e Georgio Syncello. (6) Nam extremum annum Croeſi cum decimo quarto Cyri componunt. Chronicon marmoreum Sardes expugnatas refert ad Olymp. LIX. 2. Enimuero ſi Soſicraten audimus, (7) infra Olympiadem LVIII. procedere nobis non licet: nam ea Olympiade Soſicrates tradit, Thaletem Mileſium, qui, cum Croeſus aduerſus Cyrum duceret, in exercitu *fuit*, diem obiiſſe ſupremum. Iam Croeſus, vt Herodotus habet, (8) annos quatuordecim regnauit, itaque auſpicatus eſt regnum Olymp. LIV. 2. Alyattes regnauit (9) annos ſeptem et quinquaginta, ergo rerum potitus eſt admodum puer Olymp. XL. 1. Sadyattes ante eum regnauit annos duodecim ab Olymp. XXXVII. 1. Ardys ante eum annos nouem et quadraginta.

Adieci in canone reges Aegyptios ſecundum annos, quos cuique Herodotus attribuit. In hoc negotio reſpexi Olymp. LXIII. 3. annum, quem extremum Amaſidi fuiſſe, iſta Olympionica tradunt. Puto annum eum, in quem Olympias LXIII. 3. incidit. Itaque Pſammitichi annus vltimus eſt Olymp. XL. 1. ineunte ponendus, vltra quod tempus irruptio Scytharum in Palaeſtinam non poteſt collocari. Hieronymi Euſebius ad Olymp. XXXVII. 2. *Scythae* vs-

(5) p. 50. (6) p. 240. (7) apud Diogenem Laertium in Thalete p. 9. ed. Lond. (8) l. 1. c. 86. (9) l. 1. c. 25.

vsque ad Palaeſtinam penetrarunt. Nihil incommodi in eo eſt. Vt autem Scythae Pſammetichum in Palaeſtina offenderent, eo accidit, quia, teſte Herodoto, tum maxime Azotum obſidebat: obſedit autem eam vrbem nouem et viginti annos, donec cepit.

Vbi haec bene ſeſe habent, quaerendus nobis eſt ſextus annus belli inter Cyaxaren Medum et Alyatten Lydum, cuius characterem habemus, eclipſin maximam in Aſia circa Halyn fluuium. Opponit ſe quidem clariſſimis e vetuſtate monumentis Henricus Doduellus, vir acutiſſimus, (10) *nec enim*, inquit, *Thaleti peritiam illam aſtronomiae facile conceſſero, quae neceſſaria erat ad eclipſin praedicendam: nondum ſcilicet a Cleoſtrato diuiſo per ſigna zodiaco, nec conſtituto ſupputationis exordio ab ariete: nondum vel ſpatio lunaris ſyzigiae menſtruo ſatis accurate conſtituto: nondum inventis illius cyclis aut epicyclis aut nodis: nondum vel ipſo ſatis confeſſo, corporum opacorum interpoſitionibus eclipſes eſſe tribuendas. His nondum exploratis, quae poterant eſſe caeleſtium luminarium tabulae, quae accuratae ſupputationes?* Ergo ſuſpicatur, quaſdam tenebras obortas fuiſſe a vaporibus, quas Thales ille phyſicus e regionis ſitu et tempeſtatum natura obſeruauerit. Nempe oportet ex Doduelli ſententia iis temporibus naturae multo explanatiorem rationem Thaleti conſtitiſſe, quam hodie omnibus phyſicis. Quis hoc nunc poteſt, vt heri aut

(10) In addendis ad veteres cyclos p. 910, 911.

aut nudius tertius agrum aliquem ingreſſus, in craſtinum praedicat , quae tempeſtas futura ſit ? Sic dum omnem aſtronomiam Thaleti adimit Doduellus, ob temporum iſtorum ſummam imperitiam, quaſi in vicem, phyſices tantam facultatem tribuit, quanta nunc nulla eſt in tanta omnis ſcientiae diſciplinarumque copia. At non ita bene de nobis meriti ſunt veteres in ἀστρολογουμένων hiſtoria prodenda , vt aut Anaximandrum Mileſium , aut Cleoſtratum, aut alium aliquem Graecum illa per ſe primos reperiſſe ſine controuerſia credamus. Acceperunt priſci Graeci ſua forte , vt Scaliger iudicat,(1) ἀναπόδεικτα, ex Babyloniorum obſeruatione et expoliuerunt: ſed evulgarunt in Graecia pro ſuis , ne quam partem laudis concederent barbaris , in quo poſteritas fuit aequior. Vide in exemplo quam cupidi alienae laudis Thaletis aequales fuerint. Malo autem te iſthuc cognoſcere verbis Appuleii Madaurenſis, qui Floridorum quarto libro (2) ſic fatus eſt: *Thales Mileſius iam procliui ſenectute rationem de ſole commentus eſt, quotiens ſol magnitudine ſua circulum, quem permeat, metiatur. Id a ſe recens inuentum Thales memoratur edocuiſſe Mandraytum Prienenſem , qui noua et inopinata cognitione impendio delectatus, optare iuſſit , quantam vellet mercedem, ſibi pro tanto documento rependi, ſatis, inquit, mihi fuerit mercedis, Thales ſapiens , ſi id , quod a me didiciſti, cum proferre ad quosdam coeperis , tibi non adſciueris , ſed eius inuenti me potius quam alium repertorem praedicaueris.* Nempe hi tum mores Graecorum

(1) De emendatione temporum p. 97. (2) p. 39. ed. Baſil.

eorum erant, vt multi, aut ab aliis cognita aut inventa ab ſe, in arcanis haberent, tamquam, quod excelſae mentes iudicabant, nondum ſatis exculta et matura, (plura enim veluti crepera in luce videbant animo, quam quae in lumine poſuerant) donec aliquis gloriae cupidus, cui illi ſua fouenda commendaverant, enunciaret et ſibi vindicaret. Ne Thalem quidem aut cyclum illum ſuum ſolis, qui neceſſario cum cyclo aliquo lunae comparatus fuit, aut eclipſium qualemcumque rationem primum reperiſſe patior, perpoliuiſſe nec protuliſſe tamen ad populum, non dubito. Qui autem exiſtimare poſſumus adeo infantem fuiſſe Thalem, vt eum Doduellus fuiſſe cupit? cum, quae Mandrayto Prieneuſi in aurem dixit, iſta fere omnia deſiderant, quae Doduellus Thaleti adimit. Illo igitur tam infirmo Doduelli praeiudicio omnem priſci aeui fidem conuellere audebimus? Quid autem Doduellus ipſe in hac chronologiae parte egit? *Annum*, inquit, *praelii ex hiſtoricis monumentis certiorem exiſtimo, quam eclipſin.* Nimirum cum Plinius in praelio Medorum Lydorumque, quod ſexto anno belli commiſſum eſt, ſolem defeciſſe ſcribit Olymp. XLVIII. 4. rem eo vtique anno geſtam cenſuit Doduellus, eclipſin ipſam rei geſtae accommodatam fuiſſe teſtimoniis. Ex eo iudicauit, Scythas Olympiadis XLIII$\frac{2}{3}$ ex Aſia fuiſſe exterminatos. In hoc tempore nobiſcum concordat. Sed infirma ſunt omnia illa Doduelli ratiocinia, vt nec ipſe ſibi ſatisfeciſſe videatur, ne dum aliis.

Ioannes Baptiſta Ricciolus in chronologia re-

formata, Plinii eclipſin defendit. Sed manifeſti erroris tenetur. Ait enim, *A. P. I. 4129 Maii XXVIII. hora 9. 17′. 4″. Sardibus digitorum 12. 1′. 36″. ſecundum Rudolphinas tabulas eclipſis ſuit.* Primum mallem, non Sardes reſpexiſſet, ſed regiones ad Halyn fluuium: non enim ante moenia vrbis, ſed in finibus regni Lydiae pugnatum eſt. Tum vero eclipſis, quae A. P. I. 4129. Maii XXVIII. fuit, Pliniana dici non poteſt. Nam A. P. I. 4129. Iulio menſe demum coepit Olympiadis XLVIII. 4. annus. Itaque oportuit Ricciolum aliquam eclipſin poſt Iulium menſem aut A. P. I. 4130. ante Iulium menſem indicare, quae Pliniana diceretur. Cum diuerſas ſententias de Thaletis eclipſi eſſe ſentirem, aliis eam in alium annum conferentibus, virum doctiſſimum Fridericum Chriſtianum Maierum, collegam noſtrum, conſului, qui pro ſingulari in his calculis doctrina et exercitatione hanc moleſtiam non inuitus ſuſcepit, vt omnes eclipſes, quae inter A. P. I. 4106 vsque ad A. P. I. 4158 in Aſia minori contingere potuerunt, inueſtigaret, omniumque, quae de Thaletis eclipſi exſtant, examinaret ſententias. Is de hac Riccioli eclipſi ad tabulas Rudolphinas exacta ita mihi reſpondit „A. P. I. 4129. in Maium men-
„ſem eiusque diem XXVIII. eclipſis quidem incidit,
„cuius vmbra mediterraneum mare, ſecundum eius
„longitudinem, emenſa eſt: verum, quia ad littora
„Aſiae minoris ſub ſolis occaſum appulit, in Nato-
„lia nulla fuit eclipſis totalis, quin nec conſpicua,

„ob

„ ob inſtantem ſolis occaſum." Calculum ipſum cum huius eclipſeos, tum ceterarum, duplici artificio inſtitutum, apud me depoſuit, ſi quis forte eum requireret.

Praeterea haec Plinii et Riccioli ſententia omnem veterum monumentorum fidem conuellit. Herodotus Cyaxarem Medorum regem, non Aſtyagen Cyaxaris filium cum Alyatte bellum geſſiſſe teſtatur: at Plinius et Ricciolus incidunt in annum XIII. Aſtyagis. Eudemus in hiſtoria aſtrologiae auctor eſt (5) βασιλεύοντος Κυαξάρους μὲν τοῦ Ἀστυάγους πατρὸς, Μήδων, Ἀλυάττου δὲ τοῦ Κροίσου, Λυδῶν, *regnante Cyaxare patre Aſtyagis in Media et Alyatte patre Croeſi in Lydia*, eclipſin eam obſeruatam eſſe. Hic quidem Clemens Alexandrinus addit circiter L. Olympiadem, ſed hoc ab Eudemi opinione abhorret, vt quoque ab Cyaxaris regno. Obſeruari etiam velim, e quibus erroribus eclipſis Thaletis Pliniana ſit orta. Ὀλυμπιονικῶν συναγωγὴ ad Olympiadis XLVIII. tertium annum, qui A. P. I. 4129. XXVIII. Maii diem continebat, ἔκλειψις ἡλίου, ἣν Θαλῆς συμβησομένην προειρήκει, *eclipſis ſolis, quam Thales futuram praedixit*. Haec ſane eſt eclipſis Riccioli, et Plinius pro tertio anno perperam ſcripſit quartum. Phlegontis Olympionica Plinius videre non potuit, vt Eratoſthenis vidit canones, in quibus hoc ipſum exſtabat.

 Re-

(5) Apud Clementem Alexandrinum p. 302. Diogenem Laertium p. 6 ne quid dicam de Theone Smyrnaeo.

Reliqua iam culpa Eratoſthenis, qui cum forte in Ariſtotelis Stadionicis, aut aliquo alio ad Olympiadis XLVIII. 3. reperit ἔκλειψις ἡλίου, nullam deinde aliam eclipſin in vicino notatam, hanc ipſam Thaletis fuiſſe, quam Herodotus commemorat, credidit, et de ſuo adiecit ἣν Θαλῆς συμβησομένην προειρήκει. Qui hunc ſecuti ſunt ducem, nihilo minus auctoritate Herodoti commoti, ſub Cyaxare rege iſtam eclipſin ponunt, vt Clemens Alexandrinus, vt ipſe Ricciolus. Alii in eo circumſpecti, Cyaxarem ſcena excedere cogunt, Aſtyagen vero cum Alyatte committunt, vt fecit Euſebius, et is, quem Cicero primo de divinatione libro ſequitur: *et quidem*, inquit, *idem Thales primus defectionem ſolis, quae Aſtyage regnante facta eſt, praedixiſſe fertur.* Neſcio an idem fecerit Plinius, aut an ſcopulum euitauerit, cum nec Cyaxarem nominaret, nec Aſtyagen, ſed ſolum Alyatten, de quo ob diuturnum regnum nulla poteſt eſſe controuerſia. Sic autem Plinius: (6) *Thales Mileſius Olymp. XLVIII. 4. praedicto ſolis defectu, qui Alyatte rege factus eſt.* Hic tamen quidam malunt legere *Aſtyage rege.* Sane Solinus et *Aſtyagen* et *Alyatten* nominibus citat.

Eclipſis, quam Ioſephus Scaliger pro Thaletis eclipſi indicauit, (7) idem incommodum habet. *A. P. I.* 4131. *Kal. Octobribus Nabonaſſari* 164. *Tybi XIII.*

(6) l. II. c. 12. (7) In fragmenta p. 14. 42. In canonibus Iſagogicis p. 321. in animaduerſionibus Euſebianis p. 89.

XIII. *feria quarta Olympiadis XLIX. 2.* Ita enim diuerſis in locis poſuit. Annum iſtum plane dicere voluiſſe Scaligerum Olymp. XLIX 2. declarat. In anno Naboraſſareo autem error reſidet. Nam A. P. I. 4131. A. Naboraſſareus 165. a 16. Ian. iniit, vt XIII. Tybi XXIX Maii Iuliani, Kal. vero Octobres illo anno XIX. Pachon eſſent, erat enim annus Iulianus biſextilis. De eclipſi ipſa conſultus Maier noſter, ita mihi reſpondit: ,, Quae A. P. I. 4131. Kal. Octob. accidit ecclipſis, in Natolia prorſus non,, potuit obſeruari, quia ibi alta iam nox fuit, nam,, cum lunae vmbra medium terrae diſcum illumina-,, tum teneret, Vranoburgi fuit pomeridiana 5. 22′.,, et Sardibus Lydiae numerata eſt 6. 54′. quae in no-,, ctem incidit.,, Igitur Scaligerum quoque bona cum venia dimittemus.

Vt is eclipſin Plinianam proxime conſequitur, ita Dionyſius Petauius, quem Ioannes Harduinus in LXX. hebdomadibus Danielis ſecutus eſt, Plinianam anteuertit. Ponit ſuo e calculo A. P. I. 4117. Hanc cum doctiſſimus collega examinaſſet, ,, profecto, ,, inquit, eclipſis, quae Iulii nona fuit, melius mul-,, tum quadrat, quam Vſſerii, verum exacte non,, quadrat: eius enim vmbra ſupra Pontum Euxinum,, tranſiuit per Scythiam et Maeotin paludem.,, Itaque in Aſia minori non potuit totalis eclipſis obſervari.

Iacobus Vſſerius Armachanus quoque in caelo non errauit, ſed in terra. Ponit A. P. I. 4113. 20. Sept.

Sept. „ At, inquit Collega noſter, quae hoc anno „menſe Septembri 19 fuit (fuit enim annus biſextilis, „quod Vſſerius non animaduertit) ſolis eclipſis, vm- „bram in terras proiecit longe ſupra Pontum Euxi- „num verſus boream exiſtentes. De Sethi Caluiſii eclipſi quoque adiecit amicus „ Caluiſius eam re- „fert ad A. P. I. 4207. Contigit quidem hoc anno „ſolis eclipſis Iulii die 30. cuius vmbra cum medium „telluris diſcum occuparet, Vranoburgi hora fere „decima ante meridiem numerabatur: ſed quia vm- „bra, prope aequatorem, telluris ſuperficiem peruaſit, „in Cherſoneſo illa non potuit videri. Caluiſius „eclipſin refert ad Febr. 2. anni huius: verum illa e- „clipſis contigit, cum in Natolia media nox eſſet. „Itaque hic annus miſſus fiat. „

Dum ita tot annorum eclipſes calculo ſuo exigit, deprehendit vnam a nemine pro Thaletis eclipſi proditam, quae noſtris rationibus vnice conuenit. Summa e calculo Maieriano haec exiit:

„A. P. I. 4111. qui eſt ante Chriſtum 603. men-

„ſe Maio die 17. ante meridiem 8. 18′. ſub „meridiano Vranoburgi.

„Fuit luminarium copula in ♉ 19. 14′. locus no- „di ☊—♉ 14. 42. contigit ergo eclipſis ſolis. „Vmbra ab interiecta luna in terram delapſa, in- „vaſit primo littora Aethiopiae, prope aequa- „torem, vbi nimirum altitudo poli arctici eſt 1.° „40 et longitudo loci ab inſula Ferro numerata, „23.° fere. Perrexit dehinc verſus Nili oſtia per- venit-

,,venitque ad Cyprum, cum ibi horam antemeri-
,,dianam numerarent nonam fere. A Cypro te-
,,tendit per Ciliciam et Cappadociam appulitque
,,ad Trapezuntem Ponti, cum ibi eſſet hora $10\frac{1}{2}$.
,,fere, ante meridiem, horas inter nonam et de-
,,cimam. Migrauit deinde per mediam Aſiam et
,,mare pacificum ingreſſa, terram exceſſit. Quia
,,luna fuit perigaea et ſol apogaeus, vmbra ingen-
,,tem terrae tractum occupauit, latum ſcilicet
,,46 milliaria Germanica, in quo ſol vbique peni-
,,tus euanuit: verum et quae ad latera huius tra-
,,ctus ſunt regiones ſolem valde laborantem vide-
,,runt, lucemque diei fere perdiderunt, ita vt
,,plebs ſatis potuerit expaueſcere. Pertinet ad
,,hos tractus laterales Lycia, Pamphilia, pars
,,Phrygiae maioris itemque Galatiae.

Per characteres, quos hiſtoria ſuppeditauit, nulla alia eclipſis nobis opportuna eſt et vel tolerabilis, quam Vſſeriana et Maieriana; altera ab altera non magno interuallo diſtat. Illam tamen nos oportet abdicare, hanc vt veram ſequi. Nunc vide, vt Scytharum res ſuis annis definiam. A. P. I. 4111. Maii 17. pugna inter Cyaxarem et Alyatten commiſſa eſt, quam lux ſolis obſcurata ante meridiem inter horam 9. et 10. diremit. Tum vero annus ſextus belli inter Medos et Lydios inierat. Coepit igitur bellum ob Scythas transfugas, A. P. I. 4106. ineunte. Ante illud bellum Ninus vrbs capta eſt a Cyaxare. Ponamus captam A. P. I. 4105. et anno eodem Scythas transfugas aut ſupplices veniſſe ad

Cya-

Cyaxarem, at anno P. I. 4104. extremo, pulſos ex Aſia eſſe Scythas. Potuere etiam A. P. I. 4105. ineunte pelli, ita tamen vt annus vnus Cyaxari vacuus intercederet inter cladem Scythicam et bellum Lydium, ad inuadendos in otio Aſſyrios et Ninum capiendam. Hieronymi Euſebius Olymp. XLIII. 2. *Cyaxares Medus ſubuertit Ninum.* Herodotus non euerſam, ſed captam teſtatur. (9) Medi, inquit, Scythas exterminarunt, ϗ ὕτω ἀνεσώσαντο τὴν ἀρχὴν ϗ ἐπεκράτεον τῶν περ ϗ πρότερον, τήντε Νῖνον εἷλον, *ſic imperium recuperarunt, et ea, quae antea tenuerant, immo etiam Ninum cepere.* Quare Scaliger argute autumat, in Graecis Euſebianis exſtitiſſe, Κυαξάρης ὁ Μῆδος τὴν Νῖνον αἱρεῖ, quod ambiguitate ſua vel *euertiſſe* vel *cepiſſe* ſignificat. Sed annum captae Nini in Euſebio nihil moror. Porro cum Scythae XXVIII. annos populis in Aſia ſuperiori graues fuerunt, ſequitur, eos Aſiam inuaſiſſe A. P. I. 4077. Et quoniam non illico, vt Volgam et Tanaim traiecerunt, irrumpere potuere in Aſiam, cum eos res ſuas ordinare nouamque ditionem inter gentes ſuas deſcribere et familiis proſpicere oportuit, ideo probabile eſt, A. P. I. 4075. Cimmerios a Scythis pulſos, partem vltra Boryſthenem conceſſiſſe, partem per Caucaſea clauſtra fugiſſe in Aſiam. Sic res illae Cimmeriae incidunt in aetatem Ardyos Lydiae regis. At dicet quiſquam, iſto modo Scythae Aſiam ſuperiorem adorti ſunt, non Cyaxare regnante in Media, ſed Phraorte. Fateor equidem hunc ſcrupulum me diu at-

(9) l. I. c. 106.

atque acriter excruciaſſe, vt Vſſerianae hypotheſi vehementer fauerem, per quam mihi ſcrupulus ille eximi videbatur, quamquam ne ab eo quidem totus. Vide, quae poſſint ad defendendam hanc ſententiam meam dici. Primum manifeſtum quidem eſt, neque Cyaxaren annos quadraginta, neque Phraorten annos duos et viginti ita exacte regnaſſe, neque ceteros fortaſſis deinceps omnes ſuos annos ſolidos exegiſſe, vt non aliquid in duobus annis extremis Phraortis decedere, aut principio Cyaxaris adiici poſſit. Sed hoc tantum non fuerit, opinor, vt nos hic iuuare queat. In annorum quantitate nihil quoque mutari poteſt, quia anni tota in Aſia videntur fuiſſe Nabonaſſarei 365 dierum ſine horarum ſex reſiduo, ſine intercalatione vlla. Itaque ſaltem non abſurdum, Scythas propter difficultates a potentia Medorum obiectas, non, veluti turbine quodam, paucis menſibus tota Aſia excurſionem feciſſe. Sero vtique in Palaeſtinam venerunt, vt ſubſtitiſſe eos appareat duos annos primos in finitimis Mediae prouinciis et paullatim promouiſſe. Occupauerint primo impetu Caſpias portas et vicinas regiones, altero anno auctos ab domo ſuorum numero, aut in Armeniae aut Meſopotamiae florentiſſimis vrbibus diripiendis ſubſtitiſſe veroſimile eſt. Quid autem? eane res potuit Phraorten ab Aſſyriis abducere contra Scythas, aut eo caeſo, Cyaxaren ab obſidenda Nino auertere in nouos hoſtes? Multa in eundem modum quaeri poſſunt, non modo in vetuſtis factis, ſed etiam in recentibus hiſtoriis. Nimirum non omnia geruntur eo iudicio, quod re-

rebus geſtis ferre ſolemus, pleraque impetu quodam animorum ad euentus caeco peraguntur, quorum gloria non in conſiliis, ſed in fortunae exitu ſita eſt. Etiam hoc plerumque accidit, vt notus hoſtis plus terroris habuerit et inuidiae, quam recens. Cognoſcite hoc ex rebus CPlitanis aduerſus Perſas magna vi geſtis, dum a ſeptemtrionalibus barbaris non item caueretur. Itaque Scythae, cum Phraortem caeſum, Cyaxarem cum exercitu ad vindicandam patris mortem contra Ninum mouiſſe audirent, capto animo, ipſam in Mediam impetum fecerunt A. P. I. 4079. et Cyaxaren, is ab Nino trepidis nunciis accitus occurrit, praelio vicerunt.

Credo equidem, neminem horum temporum rationes magis certas explicaturum eſſe. Si quis dubitat, huic ego, bona verba praefatus, vehementer faueo et auctor ſum, vt ſe ſaltem hiſce excitari patiatur, vt quod effici poſſe nego, ipſe confectum tradat, meque conuincat, ἵνα ἐυτυχέςατον ψεῦσμα 'ψευσμένος ὦ, vt ille ſapiens ſenex quondam dicebat. Homerus omnium in Graecia ſcriptorum antiquiſſimus hanc noſtram de Scytharum migratione ſententiam confirmat. Is enim *Cimmerios* canit et *Thracas* et *Myſios* ad Iſtrum, et *Galactophagos*, *Agavos*, *Hippomolgos*, *Abios*, (10) *Scythas* vero nullos. Et is erat Homerus, qui, quantum ea aetate res barbarorum et ſitus regionum vrbiumque, cum intra Graeciam, tum extra eam, exſtabant et cognoſcebantur

(10) Iliade N. v. 4. Odyſſea A. v. 15.

tur, et ſibi viſus eſt ſcire et ſtudioſe, qua potuit, oſtentauit, quoniam in eo prudentiae ſummam laudem poſuit, ſi quis

πολλῶν ἀνθρώπων ἴδεν ἄστεα καὶ νόον ἔγνω

multorum prouidus vrbes et mores hominum inſpexit. Attamen callidus ille πολυιστορίας oſtentator, nihil de Scythis: certo argumento, nullos iis temporibus Scythas ad Pontum coluiſſe, vbi tum Cimmerii Homero noti coluerunt. Strabo (1) contra ea Nomadas Homero cognitos fuiſſe contendit: ſed id vocabuli fruſtra in poeta quaeſiueris. Forſan, cum apud vetuſtos grammaticos Strabo legeret, vt nunc in minoribus ſcholiis eſt, *Abios*, Αμαξοβίους καὶ Νέμαδας ὀνομαζομένους, memoriae lapſu ipſo in Homero *Nomadas* ſe legiſſe cenſuit. Ab eodem errore abreptus Stephanus Byzantius: Σκύθαι ἐκαλοῦντο πρότερον Νομαῖοι. Scio equidem omnes Homeri interpretes, quos Euſtathius Theſſalonicenſis, non magni vir iudicii, ſecutus eſt, Abios et Agauos et Hippomolgos, vno nomine explicare Scythas: Nicolaum vero Damaſcenum in Galactophagis Homericis tamquam Scythis acquieſcere. Sed ego ipſum Scytharum nomen iure meritoque requiro!, Abios autem et Agauos et Hippomolgos ad quoscumque alios, etiam ad Cimmerios, eadem facilitate referre me poſſe video, qua illi ad Scythas. Ne dicam, nomina haec per ſe ipſa nos circumſiſtere et flagitare, vt ſe ingenio poetae conficta fuiſſe patiamur: ſunt enim plane Graeca.

(1) p. 30. 31. ed. Henri Petri. Sic etiam Nicephorus Gregoras hiſtoriae Byzantiae l. II. c. 4. qui autem totum paene genus humanum cum *Scythis* commiſcet, ipſosque Cimmerios et hic tamen Homerum teſtem citat.

Eodem argumento iam Cyrenaeus ille Eratoſthenes oſtendit, Homerum Scythas non nouiſſe, ob id ipſum, Straboni, dici vix poteſt, quam inuiſus. (2) Ac de Homeri aetate nihil quidem certi conſtitui poteſt, quis enim neſcit, quam multa hic diſputari ſoleant? mihi tamen quam proxime abeſſe a veritate videntur, qui poetam longiori interuallo a Troia euerſa collocant, quod ipſe vehementer poſtulat, quoties illud ſuum οἷοι νῦν βροτοι εἰσιν ingemiſcit. Mouet me quoque auctoritas Herodoti, (3) qui Homerum quadringentis duobus et viginti ante ſe annis ſcripſiſſe teſtatur. Herodotus circa quadrageſimum aetatis annum Olympiadis LXXXIII. anno tertio hiſtoriam in Panathenaeis edidit: igitur Homerus fuit annis ipſis nonaginta et vno ante Olympiadas Iphiti, annis autem ducentis viginti nouem ante Cimmerios a Scythis pulſos. Atque ſi quis ex Theopompo et Euphorione in Olympiadem XXIII. et annum quingenteſimum a Troia capta Homerum conferre malit cum Doduello, quae citima aetas eſt, vt iuniorem eum cum aliqua ſpecie veri proditurus ſit nemo, tamen etiam ſic annis octo et ſexaginta Scytharum expeditionem anteceſſit.

Eratoſthenes quidem (4) Heſiodi verſum protulit,

---

(2) Strabo p. 338. 340. (3) Scio Herodotum in vita Homeri edere annos 022. ab Homero, ad expeditionem Xerxis. Et Scaliger quidem ad Euſebium p. 102. pro ἑξακόσια legi vult τετρακόσια, at fruſtra locum illum ſollicitat, vt ex annis ab Ilyo capto, iſthic apparet. Immo vero ipſe liber Herodoto eſt ſuppoſitus a Gracculo quodam, vt demonſtrari poteſt. (4) Apud Strabonem p. 340.

lit, in quo Σκύθαι ἱπποµολγοὶ citantur, ſed ne quid dicam de Heſiodi aetate, quae eſt paene incertior, quam Homeri, hic ipſe verſus an Heſiodi ſit, dubitare nos oportet. Multi enim ferebantur Homeri et Heſiodi verſus, qui neutrius eſſent, ſed quos Ομηρίδαι ῥαπτέων ἐπέων τὰ πολλὰ ἀοιδοὶ, vt Pindari in Nemeis voce vtar conſarcinarunt. Boeoti ad Heliconem de ciue ſuo Heſiodo a maioribus acceperunt, nihil aliud, quam Εργα edidiſſe Heſiodum, vt adeo cetera nomen eius mentiantur. Equidem ſaepenumero mecum ſum miratus, doctos et ſagacis ingenii viros non ſenſiſſe, quantum ὁ χαρακτὴρ τῶν Εργων ad Homericam ſimplicitatem et ad vetuſtatem accedit propius, tantundem Theogoniam diſcrepare. Quanto rurſum et politius et eruditius ipſa Theogonia eſt Scutum Herculis? vt ne id quidem Theogoniae partem, nedum eiusdem Heſiodi, qui Εργα ſcripſit, opus eſſe perſuaderi mihi patiar. Et Theogoniam vtique aliquem Thaleti aequalem auctorem habere, haud contemnendis argumentis Doduellus adfirmauit. (5) Quid nunc faciamus huic minuto ἀποσπασµατίῳ Heſiodi, quod neque quale fuerit, neque ex quo quantaeque ſinceritatis opere productum ſit, apparet?

Minoris iam ſunt, quae non ex coaeuis ſcriptoribus, ſed raptim ex indoctis aut improuidis contra noſtram ſententiam corradi poſſunt. Quale eſt iſthuc, cum Lycophronis Caſſandra Teutarum Scytham

 Am-

(5) in cyclis p. 124. adde p. 250.

Amphitruonis bubulcum in iaculandi arte Herculem eruditiiſſe eique arcum donaſſe canit: cum eadem Philoctetem ῥοιβῷ χεῖρας ὥπλισαι Σκύθῃ δράκοντι *curuo dracone Scythico* (ſeu arcu) *armaſſe manus* ſomniat. Quale illud, cum Onomacritus, Apollonius Rhodius, Valerius Flaccus, Scythas Argonauticis rebus immiſcent, ſiue cum poetae Nioben tranaſſe Boſporum in Scythiam ferunt, aut, vt Apollodorus paullo cautior, *in Scythiam et Cimmeriam terram.* Quale etiam, cum ille Chalcidenſis Amazonas inducit, vti

ὑπὲρ κελαινὸν Ἴστρον ἤλασαν Σκύθας ἵππους

Quamquam etiam Iſocrates, in panegyrico, veluti rem teſtatam et illuſtrem praedicat, Thracas cum Eumolpo Neptuni filio, et poſt eos aliquanto tempore Scythas cum Amazonibus Marte ſatis Athenas inuaſiſſe ante bellum Troianum. Quale etiam illud, cum Tragici et ex iis chronicon marmoreum, Oedipoda in Scythia expiatum fuiſſe ferunt. Damus hanc veniam poetarum fictionibus, quae etiam homines mutant in lapides, et deos in quas quis requirat formas: *rhetoribus autem*, vt ait ſummus orator in Bruto, *conceſſum eſt ementiri in hiſtoriis, vt aliquid dicere poſſint argutius.* Magis me mouent, tamquam in vera hiſtoria, quae de Seſoſtri Herodotus narrat; ſiue ille potius ſit dicendus Seſooſis, vt Diodorus Siculus habet, ſeu Rhamſes, vt eſt ex obeliſo nomen eius proditum ab hierophantis apud Tacitum, aut Rhameſtes, vt ex eodem obeliſco Ammianus Marcellinus. Nam vtique fuiſſe aliquem regem Aegypti,

pti, qui Aſiam peruagatus, magnam nominis et rerum geſtarum famam ad poſteritatem reliquerit, inconſulte inficiari nos non delectat, neque adeo priſcis monumentis obſtrepere decet. Euſebius totis annis quingentis hunc regem ponit ante Olympiodas Iphiti. De hoc rege Cornelius Tacitus (6) ſcribit, ſeniorem ſacerdotem Aegyptium apud Thebas ita Germanico Caeſari prodidiſſe: *cum ſeptingentis millibus aetate militari Rhamſen, Libya, Aethiopia, Mediſque et Perſis et Bactriano ac Scytha potitum, quasque terras Suri* (Syrii)) *Armeniique et contigui Cappadoces colunt, inde Bithynum, hinc Lycium ad mare imperio tenuiſſe.* Herodotus autem ita accepit a ſacerdotibus Aegyptiis, cum quibus verſatus eſt, (7) Seſoſtrin primum claſſibus obiiſſe mare Erythraeum et populos ſubegiſſe, tum pedeſtri expeditione ſuſcepta Aſiam debellaſſe, inde iam in Europam transgreſſum Scythis et Thracibus ſubactis, ad Phaſin vsque penetraſſe: obſcuram deinceps rerum famam eſſe, niſi quod Colchos Aegyptii ex illius exercitu iis in regionibus conſediſſe ferebant. Enimuero nego ex eo ſequi, Scythas illic iuxta Thracas Seſoſtris temporibus et ab omni aeuo coluiſſe. Cum hieromantae Scythas et Thracas ex obeliſco interpretati ſunt, non illa nomina in ſaxo hieroglyphico erant, ſed ab interpretibus earum nomina gentium prodebantur, quae tum his locis agebant, in quibus Seſoſtrin tot ſecu-

(6) Annalium l. II. c. 60. (7) l. II. c. 102 ſeq.

ſeculis antea bellum geſſiſſe acceperant. Immo vt Hadrianus Aug. Seruiano ſcripſit, (8) *Aegyptum totam ſe didiciſſe leuem, pendulam et ad omnia ſamae momenta volitantem*, talis illa omni tempore fuit, ſui aeſtimatrix, contemtrix aliarum gentium, plena inuidiae, ventoſa, alienae laudis furaciſſima. Inſignis eſt locus apud Herodotum de Sanacheribo Aſſyrio (9) vbi rerum, quae in Iudaea contigerant, manifeſto plagio ſe inquinarunt Aegyptii. Sed vel hoc ipſo loco Aegyptiorum vanitas deprehenditur. Exſtat enim, ſiue Hermapionis, vt Ammianus Marcellinus (1) eum vocat, ſiue, vt Tertullianus, (2) Hermatelis interpretatio Rameſſaei obeliſci, vtcumque eam explodit Athanaſius Kircherus, tamen fide multo dignior, quam diuinationes ſunt Kircherianae, in qua ſic tertium ςιχον in auſtrali parte obeliſci explicat: Ἀπόλλων, κρατερὸς Ἡλιȣ παῖς, παμφεγγὴς, ὃν Ἥλιος προέκρινεν ϗ Ἄρης ἄλκιμος ἐδωρήσατο, ȣ̃ τὰ ἀγαθὰ ἐν παντὶ διαμένει καιρῷ, ὃν Ἄμμων ἀγαπᾷ, πληρώσας τὸν νεὼν τȣ̃ Φοίνικος ἀγαθῶν, ᾧ θεοὶ ζωῆς χρόνον ἐδωρήσαντο. Ἀπόλλων κρατερὸς υἱὸς Ἥρωνος βασιλεὺς ΟΙΚΟΥΜΕΝΗΣ Ραμέςης, ὃς ἐφύλαξεν Αἴγυπτον, τȣ̀ς ἀλλοεθνεῖς νικήσας, ὃν Ἥλιος φιλεῖ, ᾧ πολὺν χρόνον ζωῆς ἐδωρήσαντο θεοὶ, δεσπότης ΟΙΚΟΥΜΕΝΗΣ Ραμέςης, αἰωνόβιος. *Apollo potens ſolis filius, totus ſulgidus, quem ſol primo honore mactavit,*

(8) Flauius Vopiſcus in Saturnino c. 8. (9) Herodotus l. II. c. 141. Euſtathius H. A. in Homeri p. 34. 35. ed. Rom. (1) p. 125. ed. Gron. (2) de ſpectaculis c. 8.

vit, et Mars ſtrenuus donis repleuit, cuius bona omni tempore permanent, quem Ammon diligit, repleuitque templum bonis Phoenicis, cui dii vitae tempus donarunt. Apollo ſortis, filius Heronis, rex ORBIS TERRARVM Rameſtes, qui cuſtodiuit Aegyptum, alienigenis deuictis, quem Sol diligit, cui multum tempus vitae donarunt dii, dominus ORBIS TERRARVM Ramneſtes longaeuus. Haec erat vetus memoria, quam cum hieromantae, ſiue Herodoto, ſiue Dario Hyſtaſpis (*) ſiue Germanico Caeſari interpretarentur, tum illi vero praeturgidi ambitione, gentes τῆς ΟΙΚΟΥΜΕΝΗΣ recenſebant deuictas, quarum in obeliſco nomina extabant nulla, ſed quas ſua aetate orbem terrarum incolere audiebant. Sic Conſtantinus Manaſſes (3) Hunnos in Seſoſtris exercitu fuiſſe cecinit:

Καὶ Πάρθȣς μετωνόμασε τȣ̀ς Οὔννȣς ἤτοι Σκύθας.

Quo in errore Conſtantino praeiuit Arrianus Photii (*) Parthos inde a Seſoſtri et Iandyſo rege Scytharum prodens. Heſychius Mileſius ἐν πατρίοις Κωνςαντινȣπόλεως (4) tradit: Οδρύσην τὸν τῶν Σκυθῶν βασιλέα, traiecto Iſtro, vsque ad moenia Byzantii cum exercitu veniſſe contra Byzantem: illum inquam patrem vrbis et conditorem, quem etiam in numis ſignarunt Byzantii. Si Byzantium Olymp. XXX. 3. conditum eſt, vt Euſebius Hieronymi annotauit, nihil quidem impedit, quin annis XX poſt, Byzas et ſuperſtes fuerit et bellum habuerit cum Scythis. At ipſum no-

(*) Herodotus l. II. c. 110. (3) p. 12. (*) p. 24. ed. Hoſchelii (4) p. 26.

men Ὀδρύσης Thracicum eſt, vt hic potius Heſychium illum Illuſtrem aliquid humani paſſum arbitrer. Scio deinde Byzantii origines ab aliis alia in tempora referri: at cauſſa eadem Heſychii et error manet.

Remoratur me adhuc res vna, quod, cum Ariſteas Cauſtrobii Proconneſius de Scytharum migratione tamquam ſuae aetatis negotio, ſi Herodotum audimus, (4) verſus edidit, is ipſe Ariſteas ſeu vltra Homeri aetatem, Tatiani iudicio, ſeu aliquanto citra eam conſtituitur, tanto inquam, ante deſcriptam a nobis Scythicae hiſtoriae epocham interuallo, quanto Homerus ipſe fuit. Verum Herodotus (5) recte indicauit, οἱ δὲ πρότερον ποιηταὶ λεγόμενοι τούτων τῶν ἀνδρῶν γενέσθαι, ὕστερον, ἔμοιγε δοκέειν, ἐγένοντο τούτων, *qui ante Homerum et Heſiodum dicuntur fuiſſe poetae, vt ego arbitror, poſt eos fuerunt.* Magnus illorum eſt numerus, quos Ioannes Albertus Fabricius in Bibliotheca Graeca, more ſuo, diligentiſſime recenſuit. Quae autem Herodotus de Ariſteae ad Scythas et Iſſedonas Arimaſpasque profectione refert, ea fabulis aptiora ſunt, quam verae hiſtoriae. Septem annis, inquit ille, ab Proconneſo abfuit, eos enim annos inter Scythas et Arimaſpas egit, deinde cum rediit, Ἀριμάσπεια ſcripſit atque iterum euanuit: occurrit tamen alicui Cyzicum petenti: denique trecentis annis et quadraginta poſt, tamquam longaeuae vmbra Sibyllae Metapontinis viſus eſt praecipere, vt Apollini aram ponerent et ſtatuam ſibi ad

(4) l. IV. c, 13. 14. 15. (5) l. II, c. 53.

ad eam aream dedicarent: Apollinem enim Scythicas terras obiiſſe, ſe illum corui ſub ſpecie ſecutum, nunc ſibi reſtitutum, iterum hominem, iterum Ariſteam eſſe: hoc dicto diſparuit. Adde illis trecentis et quadraginta annis, quibus Ariſteas non fuit et iterum fuit, aliquot annos ab eo tempore, cum Metaponti eſt viſus, vsque ad Herodotum qui haec narrat, iam erit Homero aequalis, aut etiam ſuperior. Quid huic ſpectro faciemus? Pſeudomanti Samoſatenſis ſcurrae, an Philoſpeudi inſeremus? Ita mihi videtur, ita fuit viſum Dionyſio Halicarnaſſenſi, fallaciam illam eſſe et meras nugas. Neque aliter ſenſit Herodotus. Fuit Ariſteas aliquis, quem Proconneſii ad Hyperboreos, hoc eſt, ad Graecas colonias in ſeptemtrionali littore Ponti profectum meminerant. Redierit ille Ariſteas et repentino aliquo fato perierit, is tamen non fuit, qui Ἀριμάσπεια ſcripſit. Sed caſus Ariſteae, multis poſt annis Proconneſium aliquem, forte Bionem Proconneſium, Pherecydis Syrii aequalem, incendit, vt Metapontinis illuderet atque vt iſtius Ariſteae nomine ederet Arimaſpeia. Non illa tamen prorſus contemnenda, cum Proconneſus libero Ponto commercioque cum Scythis vteretur, vt ſitus regionum illarum resque Scytharum, Arimaſparum, Iſſedonum, vt tum erant, et paullo ante geſtae, percommode illa in vrbe cognoſcerentur. Igitur Herodotum non reprehendo, qui Ariſteam hunc, dum nihil a Scytharum et Graecorum Ponticorum narratione alienum adferret, hiſtoriae ſuae inſeruit: laudo magis, quod non diſſimulauit, circumſpecte at-

que parce a ſe huic erroni fidem adhiberi. Arimaſpia autem tribus libris bellum Arimaſparum cum Gryphibus complectebantur, ex quibus Dionyſius Longinus (6) hos verſus profert:

Θαῦμ' ἧ μὲν καὶ τοῦτο μέγα φρεσὶν ἡμετέρῃσιν,
Ἄνδρες ὕδωρ ναίουσιν ἀπὸ χθονὸς ἐν πελάγεσσι.
Δύστηνοι τινές εἰσιν. ἔχουσι γὰρ ἔργα πονηρά.
Ὄμματα ἐν ἄστροισι, ψυχὴν ἐν πόντῳ ἔχουσιν.
Ἦπου πολλὰ θεοῖσι φίλας ἀνὰ χεῖρας ἔχοντες
Εὔχονται σπλάγχνοισι κακῶς ἀναβαλλομένοισι.
Percuſſere animos ſed et haec miracula noſtros:
Deſertis homines terris habitant mare Ponti.
Heu genus inſelix, facies quos dira laborum
Exercet: namque aſtra oculos, animum occupat aequor.
Saepe ſupinatas tendunt ad ſidera palmas,
Vota ſed immanes diſcerpunt irrita venti.

Vt quoque apponam elegantem interpretationem, Tzetzes in Chiliadibus hoc quaſi fragmentum Arimaſpiorum adfert:

Ἰσσηδοὶ χαίτῃσιν ἀγαλλόμενοι ταναῇσι,
Καὶ σφᾶς ἀνθρώπους εἶναι καθύπερθεν ὁμήρους
Πρὸς βορέω πολλούς τε καὶ ἐσθλοὺς κάρτα μαχητὰς,
Ἀφνειὸς ἵπποισι, πολύρρηνας, πολυβούτας,
Ὀφθαλμὸν δ' ἓν ἕκαστος ἔχει χαρίεντι μετώπῳ
Χαίτῃσι λάσιοι, πάντων στιβαρότατοι ἀνδρῶν.
Iſſedones crinibus gaudentes promiſſis,
Dicunt, ſupra ſe eſſe homines conterminos

Ad

(6) περὶ ὕψους c. X. p. 82. ed. Tollii

Ad boream, multos illos et bonos in primis bellatores,
Diuites etiam equis et ouibus late paſcentibus:
Oculum autem vnusquisque vnum habet in fronte:
Hirſuti capillos, omnium robuſtiſſimi hominum.

Vides dici Arimaſpas. Aulus Gellius quoque ex Ariſteae Arimaſpis quaedam recitauit, (7) *Scythas penitiſſimos* ſub ipſis ſeptemtrionibus, humana carne veſci et Ἀνθρωποφάγους ex eo nominari: eſſe Arimaſpas ſub eadem caeli regione, vno oculo: alios vno pede, pernicitate tamen incredibili et quae ſunt alia. Neque tantum in Scythia et Hyperboreis, ſed omnium terrarum in angulis, ipſo in caelo omnia ſe vidiſſe et contemplatum finxit Ariſteas.

Salua res eſt: philoſophatur quoque iam, non mendax modo eſt.

Qua in re Maximi Tyrii (8) ſcite dictum placet, καὶ ἦν πιθανώτερος ταῦτα λέγων ὁ Ἀριστέας, ἢ ὁ Ξεναγόρας, ἤ τις ἄλλος τῶν ἐξηγησαμένων τὰ ὄντα, ὡς ἔχει. Qualis fuit Celſi illius philoſophi ſimplicitas, quam idcirco Origenes depexam dedit. (9) Ne quis denique miretur, fuiſſe in Graecia homines, qui ſui monumenta ingenii alienis nominibus inſcripſerint. Eorum enim ſcriptorum, qui ementito nomine commentarios ederent, magna ſemper copia in Graecis fuit. Hoc vt neminem fugere poteſt, qui iſtarum aetatum res cognouit, ita operae pretium erit, vno eximio exemplo commendari. Simmiae cuiusdam in Apollinem carmen

 exſti-

(7) l. IX. c. 4. (8) p. 223. ed. Heinſii (9) p. 125. ed. Spenser.

exſtitit, ex quo intelligo, illum ſiue RhodiumSimmiam ſub Ptolemaeo Philadelpho, cuius ludicra Hephaeſtion et Parthenius memorant, cuius *ouum*,*alae*, *ſecures* leguntur, ſeu quem alium, eiusdem nomine Ariſteae itinera ſua recenſuiſſe. Non, inquam, velvti Simmias ſcriberet, ſed plane Ariſteas Proconneſius. Cognoſce e Tzetzae Chiliadibus hoc fragmentum:

Τηλυγέτων δ' ἀφνειὸν Ὑπερβορέων ἀνὰ δῆμον.
Τοῖς δὴ καὶ ποτ' ἄναξ ἥρος παρεδέσατο Περσεύς.
Ενθα δὲ Μασσαγέται ἔθνος, ἐπιβήτορες ἵππων
Ναίουσι, τόξοισι πεποιθότες ὠκυβόλοισι,
Θεσπέσιόν τε περὶ ῥόον ἤλυθον ἀεννάοιο
Καμπάσου, ὃς ἅλα δῖαν ἐς ἀθανάτην φέρει ὕδωρ,
Εκ δὲ ἱκόμην ἐλαίαισι περὶ χλωρῇσιν, ἐρυμνὰς
Νήσους, ὑψηκόμοισιν ἐπηρεφέας δονάκεσιν
Ημικύνων τ' ἐνόησα γένος περιώσιον ἀνδρῶν
Τῶν ὤμων ἐφύπερθεν εὐτρεφέων κύνεον κρὰς
Τέτραφε γαμφηλῇσι, περὶ κρατέεσσιν ἐρυμνόν.
Τῶν μὲν θ' ὥστε κυνῶν ὑλακὴ πέλει, οὐδέ τι τέγγη.
Αλλων ἀγνώσσουσι βροτῶν ὀνομακλυτὸν αὐδήν.

Longe ſitorum in diuite populo Hyperboreorum,
Apud quos olim rex herosque Perſeus hoſpes,
Deinde Maſſagetae celerium equorum vectores
Habitant, fidentes longe iaculantibus arcubus.
Pertingunt quoque ad diuinos fluctus perennantis
Campaſi, qui aquam deuoluit ad ſanctum et immortale mare.
Perueni quoque circum virides oleas, in deſertas
In-

Inſulas, altisque ſe efferentes arundinibus.
Et cognoui ſemicanum hominum genus numeroſum,
Quorum ſuper aptis agilibusque humeris caninum caput
Nutrit eos maxillis, homines robore minime valentes.
Eorum ſermo, vt canum latratus eſt:
Aliorum mortalium ſermonem ignorant.

Poſt res illas, quibus Scythae in Aſia maxime celebrati ſunt, nihil ita magnopere accidit, vt in Graecia amplius cognoſcerentur, quam quod Anacharſis Scytha, Graeci ſermonis non ignarus, Athenas venit Olympiadis XLVII. anno primo, annis admodum octodecim poſtquam Aſiae imperio exciderant Scythae (10) Scio Iuſtinum plures expeditiones Scytharum commemorare et vnam antiquiſſimam Tanai regis. Matthias Belius, vir amiciſſimus, quem, vt meritus eſt, honoris cauſſa nomino, in Hiſtoriae Hungaricae prodromo, (1) hanc Tanai vetuſtatem iure ſuo vocat *abſonam et extra modum abſurdam.* Mallem vero, mecum potius exſtirpaſſet omnes iſtas Trogi Pompeii fabulas, vt inutiles herbas, quam transplantaſſet alium in agrum. Immo vero relinquamus tandem aliquando hunc Scytharum Artotrogum Pompeium. Cyri expeditionem non modo in Maſſagetas, ſed etiam in Scythas fuiſſe ſuſceptam, iam alio tempore dixi, me non immerito ſuſpicari. Sacae vtique, Caucaſeus populus, teſte He-

(10) In Commentariis hiſce Academiae Imperatoriae T. I. p. 400. pro XLVII obrepſit XLVIII. (1) p. 7.

Herodoto (2) Perſis paruerunt. Et ad eum equidem populum, aut alium aliquem in Caucaſo, refero lepidam fabulam quam e Charete Mitylenaeo Athenaeus (3) produxit de Zariadre praefecto Perſico regionum ſupra Caſpias portas ad Tanaim vsque. At Omartem, quem ille regem Scytharum vocat, Maſſagetis tribuo, cuius regia octingentis ſtadiis ad orientem fuit. Nota ſunt et teſtata tragica de exitu Cyri: quibus Xenophon fidem non potuit adimere omnem. Sed totus ordo rerum a Cyro aduerſus illos populos geſtarum caliginoſa nocte premitur, nedum vt per eam res Scythicae eluceſcant. De Budinorum et Neurorum migratione etiam dixi, et erit dicendi locus, cum Scythiae res ſub Mithridatica tempora explicabimus. Tum enim ab his migrationum in ſeptemtrionales terras initiis et ab Othino primo exorſus, vsque ad Othinum ſecundum, cum Scythae hinc a Gethis iſthinc a Mithridate, aliisque populis pulſi ſunt e Cherrhoneſo et ab Boryſthene Tanaique, conuerſiones Scythicas perſequar, inde iam nouas gentes, quales Auguſteo ſeculo fuere, in tabula deſcribam.

---

(2) l. VII. c. 64. l. III. c. 9. (3) p. 575.

ME-

MEMORIAE SCYTHICAE
AD
ALEXANDRVM MAGNVM
T. S. B.

DE magnitudine populi Scythici diuerſae ſententiae ad Herodotum (1) perferebantur, vt inter eas anceps nihil certi adfirmaret. Alii ingentem edebant multitudinem, qui videntur omnes intra Iſtrum et Tanaim populos complexi, alii, qui ſolum, vt puto, Scythicum nomen reſpiciebant, inſignem paucitatem. Αϱιαντὰς *Ariantas* rex, cum numerum Scytharum cognoſcere vellet, iuſſit, vt Scythae ſinguli ſingulos aculeos ſagittarum conferrent in vnum locum, capitis poena indicta, qui mandato non paruiſſet. Ex his aculeis ahenum fecit et in Exampaeo inter Hypanim atque Boryſthenem dedicauit. Herodotus, cum iſthic terrarum verſaretur, ahenum ipſe vidit, amplitudine ſexcentarum amphorarum, ſex craſſum digitos, ex quo argumentum capit, quanta populi iſtius multitudo fuerit. Et Herodotus quidem argute rationes iniit, ſed calculus ille non

(1) l. IV. c. 81.

apparet, Scytharum populum ſolum contineat, an alias etiam gentes, vt Agathyrſos, Neuros, Gelonos, Budinos, qui non proprie in nomine Scythico cenſebantur, et Sauromatas etiam, Melanchlaenos, Androphagos, alios, qui alterius ſtirpis erant homines, Scythis tamen dicto audientes. Ipſi Scythici populi inter ſeſe ritibus quibusdam et conſuetudinibus diſcrepabant ita, vt nulla gens aliquem alterius ritum reciperet. (2) Libertatis vero Scythicae non tantam opinionem Herodotus prodidit, quantam alii poſtea fuiſſe, neſcio qua fide iactarunt. Regio enim imperio ſubiecti, principes quoque inter ſe habuerunt, quos Herodotus modo *νομάρχας* aut vt in aliis codicibus eſt *ὑνομάρχας* (3) modo *τῶν Σκυθέων προεστεῶτας* vocat, qui reges aduerſus leges aliquid molientes coercebant: *ditiones* eorum Herodotus *ἀρχηιάς* dixit. Scylen regem proceres illi, quod Graeca bachanalia celebraſſet Boryſthene, regno expulerunt. Primus eam regni formam, cum vltra Volgam degerent Scythae, inſtituit Targitaus. (5) Is tres filios reliquit: minimus natu caeleſti miraculo, vt Scythae ferebant, regnum in omnes Scythas conſecutus eſt. Ferunt autem ex caelo decidiſſe aratrum, iugum, ſecurim et phialam ex auro ſolido. Lipoxais natu maximus, vt haec palladia tolleret, acceſſit quidem, ſed vaſa aurea ardere viſa oſtento perculerunt. Eodem prodigio Arpoxais medius filio-

(2) l. IV. c. 76. (3) l. IV. 66. et 79. l. IV. 62. (4) l. IV. 79. (5) l. IV. 5. ſeq.

liorum Targitai abſterritus eſt: at Colaxais minimus auro iam non ardente, vaſa domum ſuam tulit. Ex eo tempore maximo natu Scythae Auchatae, medio Catiari et Traſpies, minimo Paralatae dicto audientes fuerunt, ita tamen vt huius Colaxis ſumma in omnes eſſet poteſtas. Haec diuiſio ratioque regnandi in Scythis Nomadibus ad Darium vsque ſeruata eſt, ita vt tres reges eſſent. Et Colaxis quidem ipſe deinde totum regnum in tria regna diuiſum filiis tribus reliquit, ita tamen, vt vnus rex maximus eſſet, isque inſignia regni, vaſa aurea, ſecum haberet, quae ſummi illi reges ſancte cuſtodiuere et quotannis maximis ſacrificiis coluerunt. Qui ea apud reges in cuſtodia habebat, huic feſtiuitatis annuae die non licebat ſub dio dormire, ſi dormiuiſſet, eodem anno exſtinctum iri credebant: quare ei tributum eſt beneficii cauſſa tantum terrae ſpatium, quantum eques vno die circumire poterat. Illis temporibus, cum Scythae Cyaxarem vicerunt, Μαδύης Πρωτοθύεω παῖς ſummus rex erat, (6) ſiue is ipſe Madyas Scythas ab Transuolganis regionibus duxerit, ſiue pater eius Protothyas rex. Cum Darius Scythas peteret, rex ſummus Ιδανθυρσος (7) *Idanthyrſus* fuit, qui Scythiae magnam partem tenebat: ſecundae parti rex praeerat Τόξακις *Toxakis*: tertiae

(6) l. l. c. 103. (7) Iancyrum vocat Iuſtinus. Clemens Alexandrinus e Pherecyde *Syrio* p. 567. Ιδανθύραν Quaedam Herodoti exemplaria Ινδαθυρσον. at alteram lectionem *Strabo* quoque habet. *Scio* Cteſiam in Photii excerptis *Scytharcen* regem *Scytharum* nobis edere: tamen id relinquendum ſtatui, cum quam vanus fuerit Cteſias neminem fugiat.

ad Tanaim et Maeotin Σκόπασις *Scopaſis.* Herodotus hunc Indathirſum Saulii regis filium fuiſſe refert, eius inquam Saulii, qui Anacharſin fratrem, quod Athenis fuiſſet et ſacra Graeca ſectaretur, interfecit. Ab Anacharſis profectione, cum Athenas venit, ad Darii vsque expeditionem intercedunt 77. anni. Quod facit, vt res nobis non videatur incredibilis. Fuerit tum, cum Darius in Scythiam mouit, annos natus ſexaginta Indathyrſus: fuerit Saulius eo tempore, cum Anacharſis Athenas peteret, adoleſcens et ſeptendecim annis poſt genuerit Indathyrſum, ita rationes ſane concordant. Et fortaſſis ne tum quidem cum Anacharſis Athenas venit, regnauit Saulius: forte vt a longa peregrinatione per orbem terrarum rediit Anacharſis, fratrem reperit regnantem. Nihil enim definiri poteſt, abſurdum tamen quid in alterutro ſit, non video. Saulius rex Gnuri filius erat, Lyci nepos, Spargapithae pronepos. Illinc igitur etiam ſummi reges Scythiae fuerunt? Neque id inuenio in monumentis, neque vel aſſeruerim ipſe vel negauerim. At poſt Indathyrſum Αριπείθης *Aripithes*, tum Aripithis filius Σκύλης *Scyles* et Scylae frater Οκταμασάδης *Octamaſades* fuerunt, ad Herodotum vsque. Nam Herodotus teſtatur, (8) πολλοῖσιν ἔτεσιν ὕϛερον, *multis annis poſt* quam Anacharſis interiit, Scylen regem ſimili fato occubuiſſe. Cognouit ea Herodotus ἐκ Τιμνεω τȣ̃ Αριαπείθεος ἐπιτρόπȣ, aut vt in aliis co-

(8) l. IV. 78. 80.

codicibus Σπαργαπείθεος. (9) Timnes ἐπίτροπος *tutor* Laurentio Vallae : malo *procuratorem* aut *proregem* aut eiusmodi adminiſtrationis aliud quiddam , (10) tutelam regni, non regis. Si Aripithis ἐπιτροπος fuit, magna eſt auctoritas ſummi conſiliarii : ſin Spargapithis regis, vt puto , Agathyrſorum , non minor ſane eſt. Nam hic Spargapithes rex illis ipſis temporibus fuit. Aripithes rex Scylen genuit ex Iſtrina coniuge, (1) Oricum ex Opoea, Octamaſadem ex Threiſſa Terei regis filia : dolo autem Spargapithis Agathyrſorum regis interiit. Scyles filius regnum ſuſcepit , et nouercam duxit in matrimonium Opoeam. Is, vt erat a matre Iſtrina Graecis caeremoniis inſtitutus , ita Scythicis moribus non aeque vt Graecis delectabatur. Olbiam ſeu Boryſthenem ſaepe diuertit , qua in vrbe vxorem quoque Graecam duxit et aedificauit palatium magnificum, in ſpatio autem laxo circa palatium, qualem inſulam Romano more diceremus , gryphes et ſphinges ex candido lapide dedicauit. Eo quoties venit, exercitu in ſuburbanis relicto, ſolus moenia ingreſſus, portis clauſis, liberius more Graeco vixit. Graeca enim veſte ſumpta, in foro , nullo ſatellitio , comitatu nullo, Olbitis ciuibus permiſtus agebat, et cum diſciplinas audiebat cupide , tum diis quoque faciebat more Graeco. Menſe vno exacto aut amplius, veſte Scythica recepta ad ſuas ſe copias conferebat.

 Cum

(9) l. IV. c. 76. (10). Sic ἐπιτροπεύειν dixit Herodotus l. III. 142. (1) l. IV. 78. 80.

Cum aliquando Bacchicis quoque initiaretur ſacris, palatium fulminis ictu conflagrauit: ille nihilo minus initiationem peregit. Interim Olbita aliquis principibus Scytharum quae fierent per iocum et impotentiam concepti ex regia ſuperſtitione gaudii enunciat. Scythae enim Graecorum bacchanalia ſaepenumero irriſerunt, quibus abſurdum videbatur, deum inueniſſe, quod in inſaniam vertat homines. Principes Scythae, hoc cognito, cum Olbita illo ſcurra in turrim moenium adſcendunt, vident Scylen regem cum thiaſo bacchantium ritu discurrere et a daemone agitari, ad exercitum redeunt, turpidinem ſuam dolent. Inde autem cum ad ſedes ſuas ſunt reuerſi, diſſimulatam indignationem aperiunt et Octamaſadé fratre regis in regnum euecto, ſeditionem tota Scythia mouent. Scyles id agitari ſentiens profugit ad Thracas. At vbi Octamaſades cum exercitu ad Iſtrum mouit, Sitalces Therei filius Thracum rex iis conditionibus Scylem tradidit, vt germanum ſuum a Scythis reciperet. Scyles eodem die quo in Octamaſadis manus venit, capitis ſupplicio adfectus eſt. Vt ſupra dixi, Octamaſades matre natus eſt Terei regis filia, Sitalcis ſorore. Sitalces is ipſe, qui multis poſt Xerxis expeditionem annis Athenienſium ſtudioſus fuit (2) et bello Peloponneſiaco res geſſit, anno autem octauo belli, hieme, hoc eſt Olymp. LXXXIX. 1. occidit. (3) Sic ipſum Scylen habemus aequalem Herodoto, Octamaſaden vero tum maxime regnantem,

(2) Herodotus l. VII. c. 137. (3) Thucydides l. II. et IV.

tem, cum ſuas ederet Herodotus hiſtorias. Cui nunc aetati inſeremus Ariantum regem. Cum Octamaſades breui interuallo ante Olympiadis LXXXIII. 3. regnum adiit, ante eum autem Scyles rex fuit non multos annos, erunt ab Indathyrſo ad Scylen anni fere ſexaginta vacui, quibus ſolum Aripithen regem inſerere non auſim. Quare Arianthas rex ante Aripithen fuiſſe videtur, qui confecto bello Perſico, Scytharum recenſionem eo fecit, vt quantum opum ad externam quamcumque vim propulſandam e Scythia et ſubiectis populis conflari poſſet, intelligeretur. Dabitur mihi venia, cum in canone hos reges vtcumque poſui.

Regum tanta maieſtas fuit, vt Scythae maximam iurisiurandi fidem interponerent *τὰς βασιληΐας ἱςίας*, *regios lares* (4) Si quando rex aegrotaret, *ἐνάρεες ϗ ἀνδρόγυναι*, harioli tres praecipuae auctoritatis adducebantur, qui cauſſam morbi cognoſcerent. Plerumque ea ferebatur, certum hominem, quem etiam nominabant, periurio obligaſſe regiam domum. Adductus reus in hariolorum conſpectum ſi inficiaretur crimen, cognoſcendi poteſtas dabatur ſex aliis hariolis, quorum iudicio condemnatus, illico capite plectebatur. Sin ſex harioli reum abſolverent, alii et iterum alii vocabantur harioli, qui ſi plurima parte conſentirent, certa pernicies primis hariolis parata erat, tamquam impoſtoribus. Plauſtrum concameratum ſarmentis referciebant, eaque

(4) l. IV. c. 68.

que inter ſarmenta hariolos manibus a tergo pedibusque conſtrictis, ore obdurato, compingebant, tum incendebant et boues plauſtro alligatos terroribus agitabant, vt ipſe motus vim flammae aleret. Saepe boues ipſi ab igne correpti perierunt, nonnunquam euaſere ambuſti. Quos autem rex morte mulctabat, eorum etiam filii interficiebantur, puellis impunitas fuit. In foederibus hunc morem ſeruarunt. (4) Cultello aut gladio ſe ſaucientes, ſanguinis aliquid in calicem ingentem vino repletum mittebant, acinacem vero, ſagittas, ſecurim et iaculum multa apprecati mergebant in calice, tum vinum ſanguine humano permiſtum primi, qui foedus icerant, potabant, ſecundum eos ceteri comites, qui dignitatis eſſent praecipuae. Sepulcra Regum in Gerrhis fuerunt. Regis deſuncti cadauer cera inducebant Scythae, aluum expurgatam, atque ſilere et thimiamate apiique et aniſi ſeminibus impletam conſuebant, tum in plauſtro mittebant ad proximam gentem, quae Scythis ſubiecta erat. Hic populus auris regiae particulam exſcindebat, frontem ſauciabat et naſum, ſiniſtram traiiciebat ſagittis. Inde funus ab hac gente deductum ad aliam et cum omnes obiiſſet, a poſtrema ad Scythas. Iſti nunc cadauer regis in hunc modum ab omnibus gentibus luſtratum in Gerrhos deferebant. Erat iſthic iam antea ſcrobes ingens et quadrata effoſſa. Ea in ſcrobe ſuper toro in loculo cadauer componebant, ſuper

(5) ib. c. 70.

ſuper defixis ad extrema loculi ſpiculis ligna, ſuper lignis veſtes ponebant. Quod ſpatium in ſcrobe vacuum erat, eo pellicem vnam ſtrangulatam coniiciebant et pincernam regium et coquum et equiſonem et miniſtrum et internuncium, tum equos et aliarum rerum primitias et aureas phialas. Denique certatim omnes ingerebant humum, vt tumulus esſet quam ampliſſimus. Anno circumacto e famulitio regio aptiſſimos ad quinquaginta, ingenuos homines Scythas, qui ſolis regibus ſeruiebant, ad tumulum ſtrangulabant et totidem equos. Viſceribus exemtis, paleisque eorum loco impoſitis, conſuebant latera. Iam in tumuli parte altera, quinque et viginti equos ſtatuebant, ita vt ſuper duabus trabibus anteriorum pedum crura dependerent, femora ab aliis lignis depreſſiori loco defigerentur. Per ceruices traiectis palis et lateribus quoque firmatis, vno in ſtipite medium per equum acto imponebatur ſuus cuique eques, ita vt ſtipes per ſpinam dorſi ad ceruicem equitis tenderet. Capiſtra ad trabem per equorum ceruicem traiectam alligabantur. Parte altera tumuli, alii equites eodem modo collocabantur. Eius moris aliquid apud Prutenos veteres et Lithuanos manſit. Scythae Nomades ſeu Regii ceteros Scythas tamquam ſeruos ſuos contempſerunt. (6) Tamen etiam ceteri ſuos habuerunt reges: Tauri, Agathyrſi, Neuri, Geloni, Budini, et qui non erant Scythae, Melanchlaeni, Androphagi, Sauroma-

(6) l. IV. 79.

matae. (7) Agathyrſorum regem Spargapithem inuenio, (8) cuius dolo Aripithes rex Scytharum, Herodoti aetate periit.

Hoc in ſtatu cum res Scytharum eſſent, Darius Hyſtaſpis Perſarum rex bellum iis mouit, cum adhuc quidem arctioribus regionibus intra Boryſthenem et Tanaim coercerentur. Cauſſam belli fuiſſe reperio apud Herodotum, (9) quod Scythae olim Aſiam vexaſſent: forte etiam Cyri regis aemulatio Darium acuit. Nemo ita conſilio regis aduerſabatur, quam Artabanus frater, qui inopiam Scythicae gentis commonſtrando, exitio magis Perſarum quam hoſtium expeditionem fore docebat. Vt vidit fruſtra ſe ſaniora ſuadere fratri, tandem deſtitit. Ita Darius Suſis mouit, et emenſus totam Aſiam, Chalcedonem ad Boſporum tenuit. (10) Iſthic enim pontem ratitum fecerat Mandrocles Samius, quo exercitus traiiceretur. Ad Boſporum Darius naue deuectus in Cyaneas inſulas, inde Pontum contemplatus, nauigauit ad inſpiciendum Mandroclis opus. In cippis duobus, quos rex memoriae cauſſa ad Boſporum poſuit, Aſſyriis litteris in vno, in altero Graecis, ſcriptum erat Herodoti aetate, 700 millia in exercitu fuiſſe. Traiecta tanta multitudine, primi Thraces ſe ſine pugna dediderunt. At Getae, qui ſectam de immortalitate ſequebantur, Thracum omnium et iuſtiſſimi et fortiſſimi cis Iſtrum fluuium, vi ſumma debellati ſunt. Ad Iſtrum cum venit Darius,

(7) l. IV. 102. (8) l. IV. 78. (9) l. IV. c. 1. (10) l. IV. 83. ſeq.

rius, iam ponte ab Graecis ſtratus erat fluuius eo loco, vbi vno alueo deſcendens in brachia diuerſa ſcinditur. Nam a ponte Boſpori Iones Aeoli et Helleſpontii Ponto deuecti in oſtia Iſtri, aduerſo flumine duos dies nauigarant, donec commodo ad ferendum pontem Iſtro, excenſione facta opus perfecerunt. Hunc pontem a tergo reuelli volebat Darius, vt Graecos quoque relictis nauibus ſecum duceret in hoſtes. Erat enim Dario conſtitutum, vt facile eius conſilium nobis patere poteſt, per Scythiam omnem armis circumlatis ad Caſpia clauſtra reducere in Perſiam. Econtrario Coes Erxandri filius Mitylenaeorum dux auctor erat regi, vt pontem ſartum a tergo relinqueret et pontis cuſtodes Graecos: ita hunc receptum fore, ſi Scythae certaminis copiam non darent et neceſſaria deficerent in exercitu per Scythici ſoli ſummam inopiam. Id vero Dario vehementer placuit. Sexaginta dies definiuit, quibus Graeci ſtationem eam tenerent, exacto illo tempore diſceſſuros domum impune. Hac cauſſa lorum iis dedit ſexaginta conſtrictum nodis, vt ſingulis diebus ſingulos nodos reſoluerent. Si his ſexaginta diebus non rediiſſet, id argumento futurum fuiſſe credo, regem pedeſtri itinere petiiſſe Aſiam. Interim Scytharum ſummus rex Indathyrſus, accepto nuncio de aduentu Perſarum, mandata miſit ad Taurorum Agathyrſorum Neurorum Androphagorum Gelonorum Budinorum Sauromatarum et Melanchlaenorum reges, vt omnibus cum copiis adeſſent, periculum enim commune eſſe et a Scy-

this in eos quoque verſurum. Gelonus, Budinus et Sauromata conſenſerunt, auxilia ſubmittenda eſſe: ceteri exprobrabant Scythis, ſine ſuis copiis expilatam Aſiam bello huic iuſtam cauſſam praebuiſſe: itaque ſe, qui nulla iniuria laceſſiuerint Perſas, metu omni vacuos quieſcere ſtatuiſſe, ſi ad ſe quoque venerint hoſtes, ſua ſe defenſuros ſuis armis. Hoc reſponſo accepto, Scythae coactis in vnum copiis, coniuges liberosque cum omnibus facultatibus partim in caſtra recipiunt, partim quibus alendis neceſſaria defutura videbantur, iubent ſeptemtrionem lento gradu petere. Sauromatas ad Tanaim et Maeotin mittunt, qui Perſas retrocedentes inuaderent a tergo: Gelonos et Budinos iubent obſeruare Perſas et ſi qua poſſint, in eorum regiones pellicere, qui ſocietatem Scythicam detrectauerant, inde in agros ſuos ſe recipere et e re capere conſilia. Ipſi lectiſſimos praemittunt ad Iſtrum equites, qui cum Darius tertiis caſtris a flumine eſſet progreſſus, vnius diei itinere a Perſis conſiſtentes, puteos et fontes obſtruxerunt et herbam corrupere omnem. Perſae totum nomen Scythicum in propinquo eſſe rati, eo ſigna ſua vertunt et modo obequitantes, modo recipientes ſe perſequuntur vsque ad Tanaim. Eo quoque traiecto, in Sauromatas et Budinos flexerunt Perſae, capto in Budinis caſtello ligneo ſed vacuo et deſerto, vbi in ſolitudinem peruenerunt, fruſtra ſe ſequi Scythas ſenſerunt. Igitur ad Oarum fluuium Darius octo ingentia caſtella, ſexaginta inter ſe ſtadiorum interuallo, molitus, quorum rudera Herodoti

doti aetate exſtabant, Scythas elabi patitur. Illi vero per ſuperiores regiones in Scythiam ad maiora caſtra populi ſui ſe receperunt. Darius cum ab occaſu ſe oſtenderent Scythae, relicta caſtellorum exaedificatione, eodem ſe vertit. Scythae vbi toto die eluſiſſent Perſas, cum tumultu ſe ad Melanchlaenos conferunt, eodem e veſtigio Perſae. Hoc ancipiti malo Melanchlaeni cedere coacti, cumScythis ſe inferunt in Androphagorum regionem, atque inde cum Androphagis ad Neuros quoque ſecedunt. Iam omnis illa multitudo, ſequentibus Perſis, Agathyrſos quoque concitatura erat, cum Agathyrſi Scytharum conſilia intelligentes fecialem praemittunt, ipſi in finibus occurrunt armati. Societatem non amplius abnuebant: ſin eodem modo Scythae ſuas terras tumultu permiſcerent, parati fines defendere. Tum pars quaedam Scytharum et Melanchlaeni et Androphagi et Neuri ſeptemtrionem petunt, pars Scytharum alia ab Agathyrſis hoſpitio accepta, tertia pars e Neuride vertit in Scythiam vt eodem abduceret Perſas. Darius errore longo fatigatus legatum ad Indathyrſum regem miſit, vt aut reſtitaret praelioque decerneret, aut ſi ſe victum ſentiret, in colloquium deſcenderet, ſibique iam domino terram muneri ferret et aquam. Indathyrſus reſpondit: nullum timorem fugam ſibi ſuadere, neque enim oppida aut agros cultos ſibi eſſe, quibus metuat, ſed hanc Scythis viuendi conſuetudinem ſemper fuisſe, vt nullo in loco morarentur diutius, a qua vt quidquam remitterent, cauſſam ſe nullam videre: ſin

Perſae omnino decertare cupiant, ſepulcra maiorum ſuorum, quae in Gerrhis erant, aggrederentur, iſthic inuenturos Scythas propugnatores: dominos ſibi eſſe Iouem patrem et Ιϛιην τῆν Σκυθέων βασιλειαν, per quam iusiurandum darent: miſſurum dona, quae Darius eſſet meritus. Domini mentio in primis vſſit Scythas. Quare Scopaſis rex cum Scythis ſuae ditionis et Sauromatis miſſus ad Iſtrum, Ionibus auctor fuit, vt pontem reſcinderent: cum dies ſexaginta iam exegiſſent, ſine culpa fore apud Perſas, apud Scythas inituros gratiam. Iones facturos ſe ita ferebant. Et Scopaſis Ionibus fidem habens, inde ab Iſtro in maiora caſtra ſe recepit. Iam enim Scythae pugnare conſtituerant, vt qui in propinquo intercludebant Perſas. Equitatus Perſicus facile cedebat Scythico: inter pedites receptus, in tuto erat. Quin caſtra inuaderent Scythae, mulorum et aſinorum cum ſpecies tum etiam vox impedimento fuit: equi Scythici vt inuſitata in re ferociebant, nulli enim in Scythia vel aſini, vel muli. At Scythae, vt Perſas iam laborantes inopia quam diutiſſime retinerent, praeda pecoris obiecta ad ſpem aliquam recreabant. In extrema Perſici exercitus inopia fecialem cum aue, mure, rana et quinque ſagittis ad Darium mittunt: nihil praeterea in mandatis dant, quam vt celerrime rediret. Darius quidem deditionem eam eſſe interpretabatur, et terrae, in qua mures viuerent et aquae, in qua ranae et equitatus, cui ſimilis eſſet auis et roboris totius, quod in ſagittis eſſet ſitum. Econtrario Gobryas Perſa, eam Indathyrſi eſſe mentem

con-

coniiciebat: niſi Perſae tamquam mures ſubeant terram, aut aquam veluti ranae, aut ad nubes euolent, non euaſuros Scytharum ſagittas. Haud ita multo poſt Scythae in acie conſtiterunt, cum forte medio in campo lepus decurreret: eam veluti in otio perſequebantur Scythae maximo clamore. Miratus Darius, in conſpectu Perſici exercitus, quaſi in ludicro certamine ſolutos agere, ſuſpicari et ipſe coepit Perſas contemni et Gobryae ſagacitatem laudabat. Vocatur de ſumma rei in conſilium Gobryas: is auctor eſt, vt proxima nocte diſcedant e caſtris Perſae, relictis, ad fallendum falſa imagine Scythas, et aſinis mulisque et imbecillibus, qui ſequi non poſſent, Iſtrum vero praepropere petant, ne ab Ionibus deiecto ponte, excluderentur. Eius ex ſententia ſub noctem mouerunt Perſae e caſtris. Poſtridie autem, qui relicti erant, de vallo manus tetenderunt ad Scythas. Cognito, diſceſſiſſe Perſas, Scythae cum auxiliis ſuis et ſociis citato curſu per nota viarum compendia profecti ad Iſtrum, Iones etiam atque etiam monuerunt, vt ponte deiecto ſe reciperent. Placebat in primis Miltiadi Athenienſi, is dux et tyrannus Cherrhonenſium in Helleſponto erat: contra Hiſtiaeus Mileſius animos retinebat in obſequio Perſarum, et cum Scythis collocutus, approbare ſe eorum conſilium dixit atque e re ſua populique Ionici ducere, modo ad inquirendos Perſas equos circumuerterent, cetera ſibi curae fore. Hoc dicto, partem pontis verſus Scythas ad teli iactum reſcidit, tum vt fidem faceret, tum ne forte vim inferrent Scy-

Scythae. Illi contra Perſas verſi, longiſſime aberrarunt. Nam cum plerisque in regionibus herbas et puteos corrupiſſent, et Perſas crederent ſecuturos loca nulla tali clade foedata, eodem ipſi ſe contulerunt. At Perſae priori via qua venerant, receſſerunt, vt quam celerrime pontem tenerent. Vbi intempeſta nocte ad Iſtrum appropinquarunt, ſolutae in boreali ripa rates ingentem metum pepererunt, donec Hiſtiaeus omnes naues admouit et pontem reſtaurauit. Perſae in hunc modum euaſerunt, et Scythae Graecos ſaeuis adfecerunt conuitiis, haud aliter quam fida in dominos mancipia appellantes. Hae res in A. P. I. 4199. incidunt, cum paullo ante Babylon eſſet capta, aut in A. P. I. 4200. tametſi non ita certis argumentis tempus tenemus, quam coniectura.

Hinc cognoſci poteſt, quae ratio belli gerendi fuerit apud Scythas, cum maiorem vim hoſtium ſentirent: neque adeo feros exſtitiſſe, vt non ingenio vterentur atque prudentia. Erat haec conſuetudo in bello, (1) quem hoſtem Scytha proſtrauerat, eius vt potaret ſanguinem, caput ad regem perferret. Si quis nullo capite potiretur, is excludebatur a praeda, ceteri qui cepiſſent, tenebant: qui quam plurima retuliſſet, illum vero virum celebrabant. Hoſtili capiti cutem detrahebant eamque carne e bouis latere recenti maceratam tamdiu ſubigebant, donec molleſceret. Ea cute, vt mantili

(1) l. IV. c. 64. ſeq.

tili vtebantur de fraeno equi ſuſpenſo: quo quis plura coria gerebat, eo videbatur nobilior. Alii cute in fruſta conciſa laenas conſuebant, tamquam ſiſyras paſtoritias. Multi etiam manus dexteras hoſtium ipſis cum vnguibus excoriabant, quibus corytis pharetrarum vtebantur, alii totos homines excoriatos et in lignis extentos equis imponebant. Humana enim cute, vt craſſiſſima et candore nitidiſſimo delectabantur. Infenſiſſimorum hoſtium craniis infra ſupercilia exciſis purgatisque bouina coria inducebant, diuites etiam interiora cranii inaurabant et eo vtebantur poculo. Sed ſuorum quoque crania illum in vſum exſcindebat, qui lite apud regem et cauſſa cognita ſuperior e iudicio diſcedebat. His poculis praecipue gloriabantur apud hoſpites. Semel quotannis vnusquisque regionis princeps ſua in ditione tribules vino donabat, quod ſuo quisque e cranio biberet, qui fortiſſimi cenſebantur, etiam ex duobus: id vt honoris cauſſa illis tributum, ita ceteris, qui nullo hoſte caeſo excludebantur a compotatione, magnae ignominiae fuit. Nulla connubia in Scythis, promiſcuam Venerem omnium fuiſſe Nicolaus Damaſcenus ſcripſit, et ſeniores dictos patres, iuniores filios, aequales fratrum ſe loco coluiſſe: quae quidem, ſi Herodotum videas, vana ſunt et Platonicae rei publicae tantummodo apta. Nullus in Scythia manuariis artibus honos: ſola dignitas in armis: (*) nullae vrbes, nulla moenia, domos in plauſtris circumferebant, lacte et pecoribus ſe ſuosque alebant. (2) Callipidae, Alazones, (3) Budini et

(2) l. c. C, 46. (3) l. IV, c. 17. (*) Herodotus l. II, c. 167.

Geloni ſerebant frumentum et cepe, allium, lentem, milium, quo paſcerentur: Aratores Scythae, tantummodo vt finitimis venderent. De frigore harum regionum multa Herodotus. (4) Eius vim veſtibus propulſabant e cannabi, quales a Thracibus conficiebantur tanta arte, vt ignari e lino eſſe factas crederent. (5) Numquam corpus aqua abluebant. Mulieres ligna cupreſſi cedri et thuris (quod noſter dixit λιβανον) ad ſcabrum lapidem cum aqua conterentes ſuccum exprimebant, quo ſe inungerent: altero die ſiccum puluerem abſtergebant, ex quo et mundae nitidaeque erant et bene olere viſae. (6) Aurum in pretio erat: argenti et aeris nullus vſus. Celſus Scythas ἀθέυς fuiſſe criminabatur: et tamen producebat ex Herodoto deorum Scythicorum nomina. (7) Athei, quia, vt Herodotus (8) teſtatur, nulla deorum templa habebant, aras nullas, nulla ſimulacra. Et Herodotus vero deos Scytharum cum Graecis numinibus comparans, Ιϛιην Veſtam maximam deorum vocauit, quae Scythice Ταβιτι dicebatur, tum Papaeum Iouem, Apiam Papaei coniugem Tellurem, Οιτοσυρον Apollinem, Arippaſan Venerem caeleſtem, Thamimaſaden, cui ſoli Scythae Regii faciebant, Neptunum. Martis et Herculis nomina Scythica non edidit. Tyr Martis nomen fuiſſe opinor. In Faſtis Siculis ſecundum Ninum memoratur Θέῤῥας, cui pater Ζάμης, Mars frater fuerit.

(4) l. IV. c. 28. ſeq. (5) ib. c. 74. (6) l. IV. c. 75. (7) p. 373. 301. ed. Spenceri. (8) l. IV. 59.

ait. (9) Samuel Bochartus ab hoc Tyra Thracas originem ducere copioſe, vt ſolet, diſputauit. Et Ζαμης quamquam Perſice زمين *zamin*, *terra* eſt, tamen eadem notione in Scythicis quoque lignis fuit. Vt adhuc Lithuani *zeme* et *ziame* dicunt, eodem modo Pruteni veteres: Verulice item, Liuonice, Lettice, Curonice, Fennice. Apud Thracas quoque fuit, vt *Samothracia* ſit *terra Thracum.* Hoc vero nomen bellicoſi Martis *Tyr* etiam in ſeptemtrionalibus regionibus adhuc ſupereſt. Lucianus tradit in Toxari, (10) id moris fuiſſe apud Sarmatas (Sarmatas dicit ad Pontum Euxinum, qui, teſte Herodoto, Scythica in ſermone admiſta habebant multa) vt, ſi quis victus in bello ζιρειν vocaret, eius vitae parceretur, ὡς ἐπὶ λύτροις ἥκοντος. Lithuani forte ab eo vocabulo adhuc *iztirti* dicunt *experiri*, paene vt Heſychius τυρωθέντα, τὸν ταραχθέντα, κινηθέντα dixit Graece e Scythico vocabulo. Et Origenes quidem merito tum Herodotum, tum Celſum ridet, quod Scythica illa numina cum diis ſuis compararint. Herculem ſane cultum a Scythis fuiſſe, id vero profecto, vt tum erat, incredibile eſſe debuit Herodoto, cum Scythas a Graecis ſacris tantopere abhorrere intelligeret. Diis ſuis equos in primis ſacrificabant, oues quoque et humanas hoſtias: ſues vero neque alebant nec ferre poterant, (1) vt nunc etiam quaedam in Aſia ſeptemtrionali gentes ab iis abhorrent. Victima adducebatur anterioribus conſtricta

 pedi-

(9) p. 88. ed. Raderi. (10) p. 60. (1) l. IV. c. 63.

pedibus, qui immolaturus erat, a tergo extremum funem tenens, equum ſeu ouem in latus coniiciebat. Affuſa extis aqua, oſſa ſubiiciebant et incendebant veluti ligna. Si lebes non adeſſet, hoc compendium repererunt, vt carnem in aluum pecoris purgatam reponerent aqua admiſta, et ſuper oſſibus coquerent. Cocta carne proſicias ante ſe porriciebat, qui immolauerat. Marti vero ἑκάςοισι τῶν ἀρχηΐων *ſingulis ditionibus* mos fuit quotannis ſacra facere in hunc modum. Sarmentorum faſces congerebant loco quadrato, longo latoque tria ſtadia. Tria huiusce templi latera praerupta erant, vnum accliue, vt aſcendi poſſet, ſuperficies non ita alta, at aequabilis. Centum et quinquaginta plauſtra quotannis noua ſarmenta eo conferebant, quod vetera a putredine ſubſiderent. Illa ſuper ſtrue acinaces ferrei, veteres tamen quorum non erat in bello vſus, defigebantur. Hoſtiae Martis equi et oues plures, quam ceteris diis. Ex hoſtibus captiuis centeſimum quemque immolabant. Primum in capita vinum fundebant, tum caedebant homines ſuper cratere, ſanguinemque exceptum circa acinaces fundebant. Inde humeros dexteros cum manibus praeciſos iactabant ante ſe in aerem: quo ceciderant loco relicti: ſeparatim truncus iacebat. Harioli quoque permulti eo in populo fuerunt, (2) qui e virgis ſalignis grandes faſces humi poſitos diſſoluebant et ita vt fors tulerat iacentes conſiderabant: rurſum conuoluebant in faſces, iterum excutie-

(2) l. IV. c. 67.

tiebant. Ex eo iactu occulta canebant vt vates. Enaries a Venere diuinationem accepiſſe crediti, tiliae frondem vnam in tres tenues ſciſſam circum digitos voluebant et reſoluentes vaticinabantur. Sepultura regum, quae fuerit, ſupra relatum eſt. Priuati (3) cadauera ſuorum per amicos circumferebant, amici epulo accipiebant comites, ipſique cadaueri de omnibus liberaliter apponebant. Poſt quadraginta dies terrae condebant. Qui funus deduxerant, in hunc modum luſtrabantur. Primum capita abſtergebant et abluebant, inde tria ligna mutuo inclinata ſtatuebant et circum ea laneos pileos conſtipabant, per apertum foramen ignitis coniectis lapidibus ſemina cannabis adolebant, cuius nidore corpus purgari viſum. Et a Graecis quidem caeremoniis atque moribus vehementer abhorrebant, (4) tamen nonnulli his quoque capti erant ante Herodotum, poſt autem multo magis. Quare non eſt mirandum in Lithuanis, Prutenis, Curonis ceterisque quaedam Graeci moris obſeruari: et minus vero adhuc, tantam copiam Graecarum vocum in his linguis contineri, quantam nemo credere poteſt, niſi qui cognouerit.

Poſtquam Herodotus nos reliquit, neminem alium in his Scythicis tanta fide et grauitate auctorem, tanta induſtria et prouidentia ducem reperimus. Nam ſecundum illum virum, neminem Graecia habuit, qui ad eas res cognoſcendas et opportunitatem nanciſceretur et ſtudium applicaret. *Oportet*

(3) l. IV. c. 73. (4) l. IV. c. 76. 78.

tet nunc nos eſſe de ſymbolis. Quanta potentia Thracum Getarum Scytharumque fuerit initio belli Peloponneſiaci, Thucydides declarauit. (5) Anno tertio belli Peloponneſiaci, initio hiemis, vt ſcias agi de Olympiadis LXXXVII. 4. Ante C. N. 428. *Sitalces* ὁ Τήρεω *Tereifilius* Athenienſibus inſtigantibus in Macedoniam irrupit, vt aduerſus Perdicam in regnum deduceret Amyntam Perdiccae fratrem. In exercitu habuit Getas quoque, qui iisdem armis, quibus Scythae vtebantur, aliosque vicinarum regionum populos tributarios, vt non modo Macedoniae ſed toti quoque Graeciae illae opes terrori eſſent. Hic Thucydides vim omnem nominis Thracici accurate perſequitur, de Scythis autem ſic ait: ἰχύει δὲ μάχης καὶ στρατοῦ πλήθει πολὺ δευτέρα (ἡ τῶν Θρακῶν βασιλεία) μετὰ τῶν Σκυθῶν. ταύτῃ δὲ ἀδύνατα ἐξισοῦσθαι, οὐχ ὅτι τὰ ἐν τῇ Ευρώπῃ, ἀλλ' οὐδ' ἐν τῇ Ἀσια ἔθνος ἓν πρὸς ἕν, οὐκ ἔστιν, ὅ τι δυνατον Σκύθαις ὁμογνομονοῦσι πᾶσιν ἀντιστῆναι. οὐ μὴν οὐδ' ἐς ἄλλην εὐβουλιαν καὶ ξύνεσιν περὶ τῶν παρόντων ἐς τὸν βιον ἄλλοις ὁμοιοῦνται. *Sed,* inquit, *certandi robore et exercitus numero longe inferior Thracia eſt Scythis: nam cum Scythis non modo nullam in Europa, ſed ne in Aſia quidem gentem comparaueris, quae concordibus Scythis reſiſtere queat: quin etiam ne in reliqua quidem ſolertia et prudentia in rebus ad vitam neceſſariis, cum aliis gentibus conferendi ſunt.* Addit Scholiaſta: ἀλλ' ὑπερβάλλουσι, δηλονότι, *nimirum e contrario aliis excellunt.*

(5) L. II. c. 95.

ſunt. Magnitudinem populi Scythici etiam Xenophon praedicat, (6) negat tamen Scythas aliam aliquam gentem ſubigere poſſe, quod ſuis ſe finibus contineant, imo a Thracibus et Illyriis coerceantur, quemadmodum hi quoque a Scythis obſeruentur, vt librata populorum illorum potentia ceteri quoque otio perfruantur et pace. Is Xenophon in reditu e Perſica expeditione ab Armenicis iugis διὰ Σκυθηνῶν duxit. (7) Apparet ſane Scythinos iuxta Macronas coluiſſe ad borapelioten Trapezuntis iuxta Αρπασου fluuium, vt Xenophon eum vocat. Puto eum eſſe Ptolemaei *Apſorum*, Plinii *Abſarum*, Arriani *Apſarum*, ad quem Plinius quoque Macronas collocat, incertum ſuae aetatis, an ſuperioris memoriae. Videtur in Xenophonte potius corruptela irrepſiſſe, aut ab ipſo auctore aut a ſcribis: nam Arriano Cappadociae praeſidi, Alanorum victori, ceteriſque poſt eum ſcriptoribus non paucis potius fidem defero, quam Xenophonti. In Baſilii Porphyrogennetae Imp. Menologio (*) eſt ψάρος. Sed quid nominis ſit Scythini, et an a Scythis ductum, non item facile apparet.

Illo fere tempore Hippocrates, cum de aere aqua et locis commentaretur, quaedam de Scythis diſſeruit, ſi modo is liber Hippocratis eſt. Scribit autem circa Maeotin Sauromatas colere, genus hominum Scythicum, quod quid ſit, Herodotus explanatius nos docuit. Eorum vxores arcubus et ſagittis

(6) Cyropaediae l. I. 1. 4. (7) ἐν ἀναβάσει l. IV. c. 7. 8. (*) t. I. p. 221. ed. Vrbinat.

tis contra hoſtes ex equis decernere et dextera mamma carere. Nam puellis infantibus eam aeneo inſtrumento candentique exuri, vt omne robur a ſiniſtro humero brachioque auertatur ad dexterum. Non antea nubere viris, quam tres confecerint hoſtes, nuptas ab equitandi moleſtia liberas eſſe, niſi cum aliqua neceſſitas vrgeat. Tum vero Scythas ait aliquid in habitu formaque corporis habere, in qua tamquam nota a ceteris gentibus diſtinguantur. Solitudinem Scythicam, (puta eum dicere omnem regionem intra Boryſthenem et Tanaim), eſſe in planitie ſitam et pratis abundare, ψιλὴν ϗ ἔνυδρον μετριως *nudam ſyluis et ſic ſatis irriguam* : eſſe enim in ea magnos fluuios, in quos aqua e campis per riuos colligatur. Hac in planitie Scythas Nomadas nullas vrbes colere, ſed in plauſtris degere. Plauſtra minima quatuor agi rotis, maiora ſex : eſſe in iis etiam luto obduratas domos aut vno aut triplici tabulato. Ex iis quaedam trahi a quatuor, alia a ſex bobus. Iſthic foeminas agere : viros in equis habitare. Veſci carne cocta, bibere lac equinum. Caro vt ex Herodoto cognoſcimus, fere equina tantum, qua mirifice delectabantur. Euſtathius narrat in parecbolis Homericis, (8) Scytham Graecis praeſentibus equum mortuum non attigiſſe prae pudore barbari moris, eundem cum ſolus eſſet relictus, cupide voraſſe. In lacte autem recordor, quod Antiphanes Comicus dixit in Miſoponero (9)

Εἰτ

(8) p. 2. ed. Romanae (9) apud Athenaum p. 226. Excerpta Grotii ex Tragoediis et Comoediis Graecis p. 624.

Εἰτ' ȣ̓ σοφοὶ δῆτ' εἰσὶν οἱ Σκύθαι σφόδρα;
Οἱ γενομένοισιν εὐθέως τοῖς παιδίοις
Διδόασιν ἵππων ϗ βοῶν πίνειν γάλα,
Οὐχὶ, μὰ Δία, τιτθὰς εἰσάγȣσι βασκάνȣς
Καὶ παιδαγωγȣ̀ς αὖθις.
Nonne ergo praeter ceteros ſapiunt Scythae?
Qui liberis de matre adhuc rubentibus
Immulgent lactis bouini et equini copiam,
Neque illis addunt aut nutrices maleficas
Aut paedagogos.

Vt Hugo Grotius conuertit. Addit Hippocrates, ϗ ἱππάκην τρώγȣσι, τȣ̃το δ' ἐςὶ τυρὸς ἵππων. Aelius Dionyſius: (10) ἱππάκης, βρῶμα Σκυθικὸν διὰ γάλακτος ἱππέȣ σκευαζόμενον, *cibus Scythicus e lacte equino.* Herodotus (1) auctor eſt, Scytharum ſeruos, caecos omnes, lac ita mulſiſſe, vt ſimul oſciculo cauo ad inſtar fiſtulae in naturam equae indito eam ſufflauerint, ſic enim venas impleri et vbera demitti ferebant. Lac in vaſa lignea collectum: ϗ περιςίξαντες κατὰ τὰ ἀγγήϊα τȣ̀ς τυφλȣ̀ς, δονέȣσι τὸ γάλα, *et circum vaſa ſeruos caecos collocabant, qui lac agitarent*: quod in ſummo deinde erat, vt praeſtantiſſimum, ablatum: vilius iam, quod ſubſederat. Hunc locum eleganter illuſtrat Hippocrates libro de morbis: (2) ϗ τὸ μὲν πῖον (τȣ̃ γάλακτος δηλονότι) ὃ βȣ́τυρον καλέȣσιν, ἐπιπολῆς διΐςαται, ἐλαφρὸν ἐόν. τὸ δὲ βαρὺ ϗ παχὺ κάτω ἵςαται, ὃ ϗ ἀποκρίναντες ξηραίνȣσιν, ἐπὴν δὲ παγῇ

(10) Apud Euſtathium l. c. p. 916. (1) l. IV. c. 2. Idem hodie in vaccis obſeruant barbari circa Promontorium Bonae Spei, teſte Kolbio in Capite Bonae Spei hodierno p. 468. (2) l. IV. c. 13.

καὶ ξηρανθῇ, ἱππάκην μὲν καλέουσιν, *et lactis flos, quem butyrum vocant in ſummum ſuccedit, leue enim eſt: at graue quod eſt et denſum, id infra conſidet, quod vbi ſecreuerint, exareſaciunt, cum autem compactum et aridum ſuerit,* ἱππάκην *vocant.* Equinum vides caſeum. Theocritus: (3)

καὶ τυρόεντα μέγαν λευκοῖο γάλακτος.

Nicolaus Damaſcenus (*) Galactophagos Scythas ait nullis in aedibus degere: τροφὴν δ᾽ ἔχουσι, γάλα μόνον ἵππειον, ἐξ οὗ τυροποιοῦντες, ἐσθίουσι καὶ πίνουσι. καὶ εἰσὶ διὰ τοῦτο δυσμαχώτατοι, σὺν αὐτοῖς πάντῃ τὴν τροφὴν ἔχοντες. *Solo lacte equino victitant, ex quo caſeum conficiunt: eo tum potu tum cibo vtuntur: itaque non facile bello ſuperantur, quod hunc commeatum vbique circumſerunt.* Heſychius etiam panem, τυρόεντα, πλακοῦντα. Sophron in fabula Socrus: (4) συμβουλεύω τ᾽ ἐμφαγεῖν ἄρτον γ᾽ ἄρτι τυρῶντα τοῖς παιδίοισιν, *auctor ſum pueris, vt panem modo coctum edant.* Totum illud vocabulum Scythicum. Nam adhuc *tyre* Lithuani dicunt *iusculum pingue ex farina,* ſeu *pultem.* Non placet, quod Etymologicum Magnum habet: τυρὸς παρὰ τὸ τηρεῖν, κατὰ τροπήν. Sed ad Hippocratis illum librum redeo. Is praeterea auctor eſt, minime foecundam fuiſſe gentem: feras regionem incolere neque numero neque magnitudine inſignes et quae ab aeris iniuria ſub terrae hiatibus ſe defendant. In quo parum idoneas auctoritates ſecutus eſt. Vt enim elephanti et cameli nulli fue-

(3) Id. A. 57. (*) Excerpta Valeſiana p. 510. (4) apud Athenaeum p. 110

fuere in Scythia , tamen etiam inſigni magnitudine et robore corporis alces , biſontes et equi in primis generoſi. Scythas craſſos dicit et obeſos et *multi inter eos ſunt* inquit κεκαυμένοι τοὺς τε ὤμους ϗ τοὺς βραχίονας ϗ τοὺς καρποὺς τῶν χειρέων ϗ τὰ στήθεα ϗ τὰ ἰσχία ϗ τὴν ὀσφῦν *exuſti humeros atque brachia et manuum iuncturas et pectora et coxas et lumbos* , nullam aliam ob cauſam , quam διὰ τὴν ὑγρότητα τῆς φύσιος ϗ τὴν μαλακίην, *propter humiditatem naturae et mollitiem.* Cum autem vrerentur, humorem in iuncturis ſolui et corpora validiora fieri meliusque nutriri. Πυῤῥὸν δὲ τὸ γένος , *rufi vero ſunt* , propter , vt cauſſam declarat, frigus , a quo albor aduſtus in ruborem vertatur. Cauſſam vero , quamobrem non multa ſobole domus eorum augeantur , hanc edidit , quod viri ob nimiam corporis mollitiem atque frigiditatem et laſſitudinem ab aſſidua equitatione in Venere ſint ſegnes , vt mulieres propter pinguedinem, humiditatem , deſidiam , ad concipiendum. Etiam magnam multitudinem Scytharum , eſſe eneruatos. Hi Ἐνάρεες Ionico vocabulo ſeu *ſpoliati* , tum Herodoto, tum ipſi Hippocrati. Herodotus (5) Scythis, cum Veneris templum Aſcaloñienſe ſpoliaſſent, Venerem θήλεαν νοῦσον *muliebrem morbum* immiſiſſe tradit, contra ea tum his, qui numine ſuo tacti eſſent, tum eunuchis Scythis vaticinandi facultatem tribuiſſe. Paene his in verbis αἱμοῤῥοΐδας, morbum in aſſidua equitatione probabilem, deprehendere mihi ſum viſus.

 At

(5) l. I. 105. l. IV. 67.

At Hippocrates me retinet et de nullo alio malo cogitare nos ſinit, quam de debilitate. Et vt ſolet in morbis ſuis, ita in hoc quoque diuinum aliquid ineſſe Scythis concedit, cauſſam tamen etiam a natura repetit. Ab equitatione diuturna articulorum in cruribus dolores contingere, vt primum claudicent, denique coxendices contrahantur: medicinam adhiberi, quae ipſo morbo ſit pernicioſior: venam enim ad aures aperiri et ſanguine miſſo multo, aegrotum, vbi ſomnus corripuerit, obdormiſcere prae imbecillitate: a ſomno alios ſurgere ſanitate recuperata, alios nihilo melius adfectos: venas autem ea in parte corporis ſectas ſterilitatem conciliare. De hac re medici viderint. Scythae vero cum ſentirent ſe virum exuiſſe, veſtem muliebrem ſumebant, palam conſitentes ſe ad ſequiorem ſexum tranſire: nec munia niſi muliebria, obibant. Fere ditiſſimus quisque et nobiliſſimus hunc in morbum incidebat, eratque honori debilitas, καὶ σέβονται inquit, τουτέους τοὺς ἀνθρώπους καὶ προσκυνέουσιν, et ob vaticinia magnas ad eos opes vndique conferebant. Scythae, ob equitationes aſſiduas, gerebant ἀναξυρίδας, teſte Hippocrate. Erant ἀναξυρίδες, παρὰ το ἀνασύρεσθαι, Φαμιγάλια, βρακια, vt Etymologus, *braccae*, quae ſuper abdomine colligatae ad talos vsque dependebant, vt in columna, quam Arcadius Theodoſio Imp. patri poſuit, in barbaris cernimus: nonnumquam deuinctae erant pannis. Calcei videntur ex alburno fuiſſe, quas Σκυθικὰς Graeci vocabant. Lyſias in oratione pro

pro Bacchio et Pythagora apud Harpocrationem, (6) εἶδός τι ὑποδήματός ἐστιν αἱ Σκυθικαί. Alcaeus apud eundem:

καὶ Σκυθικὰς ὑποδησάμενοι.

Et huc refero, quod Plato in Politico ait: (7) Φυτῶν τε καὶ ἐμψύχων δέρματα σωμάτων περιαιροῦσα, σκυτοτομική. *Sutoria ars aptat corporibus et arborum et animantium coria.* Vt τὰ ἐμψύχων δέρματα ſunt coria boum, equorum, ceterarum animantium, ita τὰ Φυτῶν δέρματα, ſunt *libri ſalignei*, vtar enim Columellae voce, qui inter ſtipitem et corticem ſunt interiecti, ex quibus Lithuani hodie ſuos calceos conficiunt, tum Ruſſi multique alii ſub hoc ſeptemtrione populi.

Strabo (8) multum praedicat Scytharum veterum iuſtitiam, continentiam et frugalitatem, paullo tamen ante ſe, corruptelam morum et luxum a Graecis et Romanis ad Nomadas maxime peruaſiſſe concedit. Sacerdotem Getam ſiue Decaeneum ſiue Ceneum, ita diuerſis modis ſcribitur, ſuis fere temporibus vites omnes iis in terris, quas Getae tenebant, tenebant autem tum maxime magnam Scythiae partem, ſuſtuliſſe, corruptelam et peſtem populi. De ſobrietate et iuſtitia adfert teſtem Homerum, qui Abios iuſtiſſimos homines cecinerat. Nihil hoc ad Scythas, vt ſupra demonſtraui. At Aeſchyli verſum quoque produxit Strabo:

Ἀλλ' ἱππικῆς βοτῆρες εὔνομοι Σκύθαι.

In

(6) p. 321. Iulius Pollux l. VII. c. 22. (7) p. 128. ed. Henrici Petri (8) p. 341.

In eo vt concedam Straboni, *εὐνόμους* dicere poetam, quod iuſtitiae ſtuderent , quamquam tantum laudis in hac voce non eſt , tamen quantillum erat , quod Aeſchylus de Scythis compertum habebat ? Denique Strabo Herodoti nititur teſtimonio. Credo eum quae de Argippaeis ſacris et caluis legerat , in animo habuiſſe : at hos Herodotus a Scythico populo ſecernit : veſtem ait eſſe Scythicam , linguam diuerſam. Nullum diuerſarum ſtirpium certius argumentum eſt, quam in ſermone. E contrario cognoſcite in Herodoto, quanta Scytharum crudelitas et auaritia Aſiam concuſſerit. De ebrietate etiam teſtis eſt in Erato (9) Cleomenes Anaxandridae filius rex Spartanus , qui Piſiſtratidarum tyrannidem Athenis fregit. Ab Argiuis vt inſanus traductus eſt , at Spartiatae negarunt eum furiis fuiſſe agitatum, ſed morbum a Scytharum conuerſatione ei obtigiſſe. Nam cum Scythae Nomades, poſt Darium fugatum , legatos de foedere miſiſſent ad Lacedaemonios, Cleomenes ex illorum conuictu *τὴν ἀκρητοποσίην* didicit. Hunc locum Herodoti egregie illuſtrat Euſtathius in Parecbolis Homericis. (10) Nam cum oſtendiſſet , priſcos Graecos, ſobrios homines et parcos vinum aqua dilutum bibiſſe , ita fatur : *ὕστερον οὕτως ὁ ἄκρατος ἐφιλήθη, ὡς καὶ ἀγῶνα τελεῖσθαι ἀκρατοποσίας καὶ ἔπαθλον δὲ τῷ πλεῖστον πινοντι, δηλοῦσιν αἱ ἱστορίαι τῶν παλαιῶν, ἐκ δὲ τοῦ τοιούτου Σκυθικοῦ κακοῦ (δηλονότι ἐκ τοῦ μαίνεσθαι ἐκ μέθης) τὸ ἀκρατέστερον πινειν, ἐπισκυθίζειν φασὶν οἱ Λάκωνες.*

---

(9) l. VI. 84. (10) p. 398. ed. Rom.

κωνες. *Deinde ita merum voluptati Graecis ſuit, vt etiam meri potandi certamina proponerentur, qui quam plurimum bibiſſet, vt veteres hiſtoriae teſtantur: ex hoc Scythico malo, (ex inſania puta, quae ebriis obuenit) meraciſſimum bibere Lacones dixerunt* ἐπισκυθίζειν. Ne dicam Ariſtotelem,(1) Plato etiam in primo de legibus: (2) Σκῦθαι ϰ Θρᾶκες ἀκράτῳ παντάπασι χρώμενοι, γυναῖκές τε ϰ αὐτοὶ, ϰ κατὰ τῶν ἱματίων καταχεύομενοι, καλὸν ϰ εὔδαιμον ἐπιτήδευμα ἐπιτηδεύειν νενομίκασι, *Scythae et Thraces meraciſſimo vtuntur, tum matres tum viri, atque cum ipſa veſtimenta mero perſundunt, tum denique bonum et ſortunatum vitae genus tenere ſibi videntur.* Parmeno, quem mores Scytharum noſſe decuit, fuit enim Byzantius, ita in Iambis cecinit: (3)

Ανὴρ γὰρ ἕλκων οἶνον, ὡς ὕδωρ ἵππος,
Σκυθιςὶ φωνεῖ, ὐδὲ κόππα γινώσκων.
Κεῖται δ᾽ ἄναυδις. ἐν πιθῳ κολυμβήσας
Κάθυπνος, ὡς μήκωνα φάρμακον πινων.

Is enim qui haurit vinum, vt equus aquam,
Scythice loquitur, et ne coppa quidem nouit:
Mutus enim iacet, et in dolio madidus ſe volutat
Somno alto oppreſſus, veluti qui e papauere medicinam biberit.

De nullo alio Parmeno loquitur, quam de Scytha: nam in illis Iambis alia quoque de Scythis cecinerat, vt apparet e Stephano Byzantio in voce Βοδινοί. Quod autem ait, ὐδὲ κόππα γινώσκον, eam litteram dicit,

(1) In problematis c. 1. l. 7. (2) p. 515. (3) apud Athenaeum p 221.

dicit, quam Graeci priſci e Phoenicum lingua retinebant, poſteri abrogarunt: eam vero, vt arbitror, frequentem in ſermone Scythico, debili per ebrietatem lingua pronunciari non potuiſſe Parmeno ridet. Hinc in diuerbio quoque apud Iulium Pollucem Σκυθικὴ πόσις vt Θρακια πρόποσις. Et Σκυθῶν ῥῆσις ab eadem vini proteruitate diuerbio ferri videtur, quamquam Diogenes Laertius ab Anacharſidis libertate in dicendo repetit. (4) Eodem pertinet quod Perſae, teſte Herodoto, (5) πάντας τὸς Σκύθας καλέωσι Σάκας. Sacae proprie iuxta Caſpios coluerunt, a Cyro in prouinciam redacti, Σκύθαι Ἀμύργιοι, vt Herodotus eos vocat. (6) At vniuerſos Scythas profecto nulla alia ab re Perſae dixiſſe videntur Sacas quam a vinolentia. Eſt enim ساقي *Sakai* Perſice *helluo et potor*. Lubet hoc loco fabulam de Saxonum origine attrectare. Sacarum prouinciam intra Caucaſum multi prodiderunt, quare etiam R. Abraham Peritſol (7) ملكيوت ساقا *regna Saka* in quinto Climate ad orientalem Caucaſum poſuit. Hinc de Saxonum origine lepida nata fabula. Auctor Chronici Holſatici a Leibnitio in Acceſſionibus hiſtoricis editi, ſcenam inſtruxit (8) et modos fecit. Alexander M. in Armenia, vbi arca Noae fuit, reperit gentem fortem et audacem, quae *gens petrita ac petra dura propter animoſitatem vocata*: eam gentem ſibi adiunxit Alexander et cum res maximas in exercitu

(4) p. 26. (5) l. VII. 64. (6) l. III. 93. IV. 9. in Orachot Olam p. 29. edit. Oxon. (8) p. 12.

citu Macedonum *patraſſent.* *Mutauit eis nomen, petra in ſaxum, propter duritiem Saxones vocauit.* Defuncto Alexandro non auſi ſunt Saxones, qui vicinos populos adflixerant, ſuis ſe regionibus tueri, ergo trecentas naues conſcenderunt et ſe mari occidentali commiſere. Perierunt omnes praeter triginta naves, ex quibus viginti ad *Pruciam* appulerunt eamque regionem occupauere: aliae in Danubium, aliae in Albim delatae. Haec fabula ſimilis illis eſt, quas exegimus in diſſertatione de Muro Caucaſeo. Sacas auctor legerat iſtis fere in locis ad Caucaſum collocari. Sed iſthuc ille, homo videlicet eleganti ingenio, ex Latino ſermone a *ſaxis* dictum credidit. *Saxum* etiam *petra* eſt: inde eruditio hominis Holſatici emicuit, qui a *petra* primum, inde a *ſaxo*, quaſi honorificentiori vocabulo, Sacas et Saxones appellatos ſenſit. Fuit controuerſia inter Godofredum Guilielmum Leibnitium et Gerardum Meierum magis mota quam agitata, (9) de veriuerbio Saxonum. Meierus *Satos* a Tacito, deinde *Saſſos* dictos putat, a *ſaſſen*, *ſatz*, *ſiten*, tamquam *incolas, qui aliquo in loco conſederunt.* Perplacuit Leibnitio, vt ſane eſt elegantiſſima coniectura: magis tamen moveri viſus eſt Vitechindi Corbeienſes auctoritate, qui (10) a *Sabs cultello* ſeu *pugione* dictos credidit, ad quem locum Henricus Meibomius alios citat eadem in ſententia. Multus in primis eſt Gobelinus

(9) Vide Leibnitii Collectanea Etymologica parte II. p. 257. 272. 274. 284. Leibnitius notis ad excerpta ex Vitechindo p. 71. (10) p. 630. ed. Meibomii. v. Olaum Verelium in Hervorar ſaga p. 121

Perſona (1) in huius vocis etymo. Vtra ſententia magis probetur, mea non refert, quamquam quaſi priuatim fauco Meiero, modo de ſaxis nihil alicui in mentem veniat. Vitechindus tamen, quamquam ceteris cautior, Gobelinus, ceterique fabulam de Alexandro M. et Saxonibus ad Caucaſum, ſine dubio e ſaxis Caucaſeis et a Sacis ad eum montem, ortam vehementer probant. Qua autem via Saxones a Caucaſo in Holſatiam et Pruſſiam? Dixi alio loco, opinionem eam fuiſſe veterem: e Ponto in Maeotidem, inde in Caſpium mare et ſeptemtrionale nauigari. Neque alienum erit ab hoc loco, iterum monere, qui error de ſitu harum regionum, quae monſtra opinionum excluſerit. Legebantur vulgo Argonauticorum ſcriptores, quorum aliqui nunc exſtant: eorum autem fabulas transferebantur quoque in geographorum quorundam libellos, in quibus Dionyſius Periegetes fuit. Primum Pontum Euxinum altiorem, quam eſt, ponebant ad boream et ſupra eum Maeoticam paludem, rurſum magis ad barapelioten Caſpium mare, ita vt Maeotis in Caſpium mare, hoc in mare Balticum et ſeptemtrionale ſe effunderet et vt Scandinauia inſula eſſet. Sic Caucaſus non longe aberat a mari ſeptemtrionali: et Tanais a borapeliote ſupra Caſpium mare deſcendere videbatur. Ex eo ſitu multa ſunt conficta. Primum Macedonas cum in Sogdiana bellum gererent, haud longe abfuiſſe a Tanai et Caucaſo: deinde a Ponto Eu-

(1) p. 158.

Euxino in mare Balticum nauigari poſſe. Scriptores Septemtrionales, qui ſciebant Scandinauiam continentem eſſe, tamen ſub ea regione maris Baltici et Caſpii coniunctionem ſtatuebant, ita vt Caucaſus non longe abeſſet a Scandinauia. Hoc alias demonſtrabo. Ceterum hunc ſitum fabuloſum ante oculos ferre debent, qui intelligere velint Adamum Bremenſem, Eggehardum Vragienſem et Snorronem Sturlſonium. Apponamus eorum loca. Primum Adami Bremenſis: (2) *deinde latiſſima Polanorum terra diffunditur, cuius terminum dicunt in Ruzzia regnum connecti : haec* (Ruſſia) *eſt vltima et maxima Winulorum prouincia, quae et finem illius facit ſinus* (Baithici.) Tum ad ſeptemtrionem Balthici maris recenſet *Nordmannos* (Noruagos) et *Sconiam* et ſupra eam, *Gothiam, poſtea*, inquit, *longis terrarum ſpatiis regnant Sueones vsque ad terram ſoeminarum* (Amazonum ad Caucaſum) *ſupra illas Wilzi, Mirri, Lami, Scuti* (Scythae) *et Turci* (Turcos dicit Conſtantini Porphyrogennetae) *habitare feruntur vsque ad Ruzziam, in qua denuo finem habet ille ſinus Balthicus.* Sexaginta annis poſt Eggehardus (3) ad A. C. 994. de Goltrino ſcribit: *ad terram arctoam, id eſt, ſeptemtrionalem plagam venit, quae hoc nomen ſortitur ab arcturis, id eſt, vrſis duabus maiore et minore, quas ſerpens circumflexus in ſe continet, vt aſtrologi aſſerunt : hac mundi parte Scitae* (Scythae ad Caucaſum) *incertis ſedibus vagantur : genus hominum ſe-*

(2) in Hiſtoria Eccleſiaſtica p. 58. ed. Fabr. (2) p. 356. ed. Eccardi vide p. 195.

ſerum, moribus belluinum, qui ſua habitacula de pellibus aut pilis animalium ſecum vehunt, crudis ferarum carnibus et equino lacte paſcuntur: huc ille Goltrin ad ſuos veniens, in regnum hereditario honore ſublimatur. Centum annis poſt Eggehardum Snorro Sturlſonius in chronico Noruagico (4) quod Septemtrionis ſui Varro Ioannes Peringskioldus edidit: *Terrarum orbis ſinuoſus paſſim eſt et quam plurimis diuiditur lacubus, quin etiam ex oceano ipſum ambiente ingentia maria in terrae gremium ſeſe immittunt: conſtat inſuper vaſtum mare ab Noruaſund, hoc eſt, Freto Gaditano, ad Palaeſtinam vsque ſe extendere: hinc aquilonem verſus, porrectae longitudinis ſinus, quem Mare Nigrum ſeu Pontum Euxinum vocant, excurrit: heic loci tres orbis partes ad inuicem ſeparantur: parte Maris Nigri quae boream ſpectat, ſitum eſt magnum illud et frigoribus obnoxium Suioniae regnum, quod nonnulli vaſtae illi Serklandiae, nonnulli Aethiopiae aequiparant: magnae huius Suioniae plaga ſeptemtrionalis, propter intenſiſſimum frigus et inclementiam caeli, inculta iacet: plurimas habet Suionia hordas ſeu diſtrictus: diuerſis diſtinguitur linguis et varia populorum multitudine abundat, inter quos, gigantes, pygmaei, pugiles ſubfuſci coloris variaeque gentes prodigioſae inueniuntur, praeterquam quod immanes beſtias et ſtupendae magnitudinis ſerpentes hic offendes.* (Scilicet quicquid alit fabuloſus Caucaſus). *Ex montium maxime ſeptemtrionalium iugis oritur Tanais olim dictus*

(4) p. 1.

ctus Tanaquisl vel Wanaquisl, *hoc eſt*, *fluuius Tanais ſeu Vanorum amnis*, *qui per magnam Suioniam deuectus in Mare Nigrúm ſe exonerat*: *regio huius fluvii brachiis intercluſa Vanalandia ſeu Vanaheimum*, *quondam appellari ſueuit*: *ternas mundi partes Tanais ſic diſterminat*, *vt ab oriente habeat Aſiam*, *ab occidente Europam relinquat.* Inde iam Eggehardus: (*) *Hi a Sithia* (Scythia) *inferiori egreſſi Normanni lingua barbara*, *quaſi homines ſeptemtrionales dicti ſunt.* Anaſtaſius Sinaita: Σκυθίαν δ'εἰώθασι καλεῖν οἱ παλαιοὶ τὸ κλίμα ἅπαν βόρειον, ἔνθα εἰσὶν οἱ Γότθοι καὶ Δάνεις *Scythiam ſoliti vocare veteres clima totum boreale*, *vnde ſunt Gothi et Dani.* Et in hunc modum alii prope infiniti. Vide monſtroſus ſitus Caucaſi et Ponti Euxini, Mariſque Caſpii quales errores pepererit, confuſa praeſertim veterum gentium memoria cum novis incolis: πολύμορφόν τι θέαμα καὶ ἄλλοτε ἀλλοῖόν τι φανταζόμενον.

Quam inſolenter et crudeliter ſe geſſerint Scythae, Clearchus Solenſis Ariſtotelis auditor teſtatur. (5) Non grauabor locum integrum apponere.

Μόνον δὲ νόμοις κοινοῖς πρῶτον ἔθνος ἐχρήσατο τὸ Σκυθῶν. εἶτα πάλιν ἐγένοντο πάντων ἀθλιώτατοι βροτῶν διὰ τὴν ὕβριν. ἐτρύφησαν μεν γὰρ, ὡς	*Primum tantummodo legibus communibus vſum eſt omne nomen Scythicum. Poſtea Scythae per morum inſolentiam et proteruitatem omnium hominum miſer-*

(*) p. 195. (5) apud Athenaeum p. 524.

ὡς οὐδενὲς ἕτεροι τῶν πάντων, εὐροίας ϗ πλούτου ϗ τῆς λοιπῆς αὐτοὺς χορηγίας καταχούσης. τοῦτο δῆλον ἐκ ἔτι ϗ νῦν ὑπολειπούσης περὶ τοὺς ἡγεμόνας αὐτῶν ἐσθῆτός τε ϗ διαίτης. τρυφήσαντες δὲ ϗ πρῶτον πάντων τῶν ἀνθρώπων ἐπὶ τὸ τρυφᾷν ὁρμήσαντες, εἰς τοῦτο προῆλθον ὕβρεως, ὥστε πάντων τῶν ἀνθρώπων εἰς οὓς ἀφικοιντο, ἠκρωτηρίαζον τὰς ῥῖνας, ἀφ' ὧν οἱ ἀπόγονοι μεταστάντες, ἔτι ϗ νῦν τοῦ πάθους ἔχουσι τὴν ἐπωνυμίαν. Αἱ δὲ γυναῖκες αὐτῶν τὰς Θρακῶν τῶν πρὸς ἑσπέραν ϗ ἄρκτον τῶν περιοίκων γυναῖκας ἐποίκιλλον τὰ σώματα περόναις γραφὴν ἐνεῖσαι. ὅθεν πολλοῖς ἔτεσιν ὕστερον αἱ ὑβρισθεῖσαι τῶν Θρακῶν γυναῖκες ἰδίως ἐξηλείψαντο τὴν συμφορὰν προσαναγραψάμενοι τὰ λοιπὰ τοῦ χρωτὸς, ἵνα ὁ τῆς

ſerrimi euaſerunt. Nam voluptati indulſerunt ita, vt non alii aliqui populi, cum ab effluentia et opibus ceterisque rebus ad vitia corrumperentur. Id vero maniſeſtum ſit ex cultu et victu, qualis hoc noſtro quoque tempore inter eorum principes obtinet. Cum autem maxime voluptatibus ſe immergerent et primi omnium hominum ſe dediſſent voluptatibus, tandem in contumeliis infligendis adeo inſolentes ſunt facti, vt, ad quos peruaſiſſent in armis, eorum nares praeciderent. Mutilatorum in hunc modum poſteri patria pulſi, ad hoc tempus ab iſta maiorum contumelia cognomen gerunt. Vxores autem Scytharum aeque procaces, coegerunt mulieres et Threiſſas ad occidentem et ceteras ad boream, vt corpora inciderent fibulis et quaſi pingerent. Quare mul-

τῆς ὕβρεως καὶ τῆς αἰσχύνης αὐταῖς χαρακτὴρ εἰς ποικιλίαν καταριθμηθεὶς κόσμου προσηγορίᾳ τοὔνειδος ἐξαλείφη. Πάντων δ' οὕτως ὑπερηφάνως προέστησαν, ὥστε οὐδένων ἄδακρυς ἡ τῆς δουλείας ὑπουργία γιγνομένη, διήγγειλεν εἰς τοὺς ἐπιγιγνομένους τὴν Σκυθῶν ῥῆσιν, οἵα τις ἦν. Διὰ τὸ πλῆθος οὖν καταχουσῶν αὐτοὺς συμφορῶν ἐπεὶ διὰ τὸ πένθος ἅμα τόντε τῶν βίων ὄλβον καὶ τὰς κόμας περιεσπάσθησαν παντὸς ἔθνους, οἱ ἔξω τὴν ἐφ' ὕβρει κουρὰν ἀποσκυθίσαι προσηγόρευσαν.

multis poſt annis Threiſſae, quae tali contumelia adſectae ſuerant, priuato conſilio hanc calamitatem obliterarunt, cum etiam omnem reliquam cutem pingerent, vt notae contumelia et pudore plenae inter variegati corporis picturas permiſtae et confuſae, venuſtatis et decoris praetextu, opprobrium oblinerent. Omnibus autem ita ſuperbe imperarunt, vt nullius populi ſub Scythis ſeruitus ſine lacrumis eſſet, eaque res poſteris declarauit, quid id ſit, cum dicatur diuerbio Σκυθῶν ῥῆσις. *In magnitudine igitur calamitatum, quibus deuictas gentes Scythae adflixerunt, quoniam in ſummo luctu, ſimul opibus et crinibus vniuerſos ſpoliauerunt, peregrini talem contumelioſam tonſuram* ἀποσκυθίσαι *appellarunt.*

Eodem videtur reſpicere Lyciſcus Acarnan in concione ad Lacedaemonios pro Philippo rege, cum apud

apud Polybium dicit (10) Lattabum et Nicoſtratum Boeotorum mercatus, pacis tempore, ſpreta foederis religione violaſſe Σκυθῶν ἔργα καὶ Γαλατῶν ἐπιτελοῦντας, *Scytharum et Gallorum* (qui non ita multis ante temporibus in Macedonia et Aſia deſaeuierant) *facinoribus editis*. Ceterum Stephanus Byzantius: ἀποσκυθίσαι, τῷ σιδήρῳ τὰς τρίχας τεμεῖν. Heſychius, περιτεμεῖν. At Suidas: τὸ ἐπιτεμεῖν τὸ ἐπικεφάλιον δέρμα σὺν θριξὶ *reſcindere cutem capitis ipſis cum crinibus*. Habuit in memoria, quod Herodotus narrauit, quemadmodum Scythae hoſtibus occiſis inſultarint. Sed quod Clearchus ſcripſit de tonſura, quod item Euſtathius ad Homerum, (*) hoc vere erat ἀποσκυθίσαι. Nam vt Ariſtoteles teſtatur, (1) οἱ ἐν τῷ Πόντῳ Σκύθαι καὶ Θρᾶκες εὐθύτριχες *Scythae et Thraces in Ponto longis et promiſſis crinibus*. Τὸν Πόντον, non regionem aliquam in Aſia, ſed tractum ſuper Ponto Euxino ad Byzantium vsque appellauit, quod alii quoque fecerunt. Humiditati regionum adſcribit Ariſtoteles, quod crinibus tam prolixis Scythae ſunt vſi: id ſicuti non reiicio totum, ita ſtudium quoque alendae crinis fuiſſe opinor. Lucianus in Toxari (2) de Alanis: οὐ πάνυ κομῶσιν οἱ Ἀλανοὶ, ὥσπερ οἱ Σκύθαι. Eo Scythae, gentes, quas ſubegerant, crines ignominiae cauſſa ponere iuſſerunt.

Philippus Amyntae Macedonum rex multa bella

(10) p. 789. (*) p. 1292 ex Athenaeo, quo ſolet vehementer delectari (1) περὶ ζώων γενέσεως l. V. c. 3.

ſa geſſit cum Thracibus et Getis. Illis etiam temporibus rex Scytharum Atheas, vt Iulius Frontinus et Iuſtinus, vt vero Strabo et Plutarchus, Ἀτίας cum Iſtrianis bellum habuit. Erant autem Iſtri accolae, Thraces Getae Odryſae et Triballi. Triballo, ſolos Frontinus (3) in Scythico bello nominat. Cum Atheas hoſtium multitudini imparem ſe ſenſit, per Apollonienſes in Thracia ad Pontum ſitos, cum Philippo egit de auxilio ferendo, in ſpem mercedis propoſita adoptione et ſucceſſione in regno Scythico. Philippus rex, vt Iſtrianos a Scythis auerteret, Byzantium obſedit. Et Triballi quidem longius reiecti erant, quam vt Byzantii obſidione terrerentur, at totum nomen Thracicum, in quo etiam Triballi et Odryſae et Getae cenſebantur, noui hoſtis adventu trepidabat. (4) Interim, vt Frontinus narrat, Atheas rex Triballos ceterosque ſocios ſtratagemate perculit. Nam tum foeminas Scythicas tum pueros in aſinis et bobus haſtas erectas praeferre iusſit, vt ſpeciem exercitus ſui augerent, tum rumorem ſparſit, auxilia ab vlterioribus Scythis aduenisſe. Sic hoſtes eluſi ſe receperunt. Venere deinde legati Philippi regis ad Atheam de foedere. Atheas legatos cum contemtu accepit et equum ſtrigili pectens interrogauit, an idem Philippus rex faceret, (5) credo vt frugalitatem oſtentaret et duratam exercitatione virtutem. Nunciari autem iuſſit Mace-

Tom. III. Eee doni

(3) in Stratagematis l. II. c. 4. (4) Iuſtinus l. IX c. 2 (5) Plutarchus in apophthegmatis regum p. 174. Iuſtinus l. c.

doni, neque petiiſſe ſe auxilium quod tam cupide promiſerit, cum Scythae ſuis armis atque viribus hoſtes propulſare adſueuerint, neque de adoptione cogitaſſe filio incolumi. Philippum bellicoſae genti imperare Macedonibus: ſe, ſi neſciat, populum regere, qui etiam contra famem et ſitim pugnet, Scythas. At Philippus alios legatos miſit, qui cum Athea de auxiliis Macedonicis et foedere expoſtularent et ad bellum ſociale ſumma vi gerendum pecunias poſcerent. Atheas his oſtendit, Scythis nullas opes eſſe, quibus Macedonum cupiditatem expleant: ſua ſe virtute et corporum durato robore, nullis diuitiis gloriari. Hoc reſponſo accepto Philippus obſidionem Byzantii ſoluit et aduerſum Scythas duxit, miſſis aſtute legatis, qui ad Atheam mandata perferrent, Macedonem occupandi Byzantii cauſſa ſtatuam vouiſſe Herculi, eam ſe ipſis in oſtiis Iſtri dedicatum venire, cetera pacatum fore iter et ſine moleſtia Scytharum. Atheas qui dolum ſenſit, poſtulauit, vt ad ſe ſtatua mitteretur, ſe et dedicaturum et prouiſurum ne violetur: exercitum in fines ſuos intrare non paſſurum: ſin inuito ſe ſtatuam ponat, ſe ſublata ea aes verſurum in ſagittarum cuſpides. Sic concitatis inuicem animis, Macedones ad Iſtrum profecti, praelium commiſerunt. Scythae in acie et numero et virtute ſuperiores, (confitentes habemus Graecos, glorioſos homines) aſtu Philippi in fugam coniiciuntur. Vicies mille pueri foeminaeque capti, pecoris vis magna, auri argentique nihil. Viginti equarum ad propagationem generis

neris in Macedoniam miſſa. Triballi vero Philippum a victoria redeuntem ex inſidiis adorti, praedam auerterunt. Quamquam res Philippi obſcurae ſunt, tamen hoc Scythicum bellum ante Olympiadem VI. 1. et Alexandrum natum aliquot annis geſtum videtur. Ex eo tempore inter Graecos ſerui Scythae eſſe coeperunt, bello Macedonico, vt puto, capti. Etiam antea Ariſtophanes in ſcena produxit Σκύθαιναν ſeruam, teſte Suida, tamen frequentiores poſt bellum Scythicum Philippi fuiſſe in Graecia ſeruos et ſeruas e Scythis veroſimile eſt. Contra ea Atheas Graecos quoque in ſeruitute tenuit, in quibus fuit Ισμηνίας ἄριστος αὐλητὴς, quem cum alii inter pocula canentem admirarentur, Atheas iurauit, hinnitum equi ſibi maiori voluptati eſſe, quam illum tibicinis ſtridorem, (6) ne qua in re Macedonibus laudem videretur tribuiſſe.

Sub Philippi regis aetatem Ephorus Cumanus triginta libris Graeas hiſtorias inde ab Heraclidis vsque ad obſidionem Perinthi et Olympiadis CIX. annum 4. conſignatas reliquit. His ille imitatus Herodotum de omnium regionum ſitu, vt tum erat notum Graecis, paſſim intexuit, quod quidem nobis conſtat e fragmentis Scymni Chii Holſtenianis:

Επειτα ἐπ᾽ αὐτȣ̃ στόματος τῆς Μαιώτιδος
Λιμνης τό Παντικάπαιόν ἐστιν ἔσχατον
Τȣ̃ Βοσπόρȣ βασιλεῖον ἐπωνομασμένον.
Ανωθεν δὲ τȣ́των ἡ Σκυθικὴ βάρβαρος

 Πρὸς

(6) Plutarchus in Apophthegmatis p. 174. de Fortuna Alexandri p. 334 Secundum Epicurum ſuauiter non poſſe viui p. 1095.

Πρὸς τὴν ἀοίκητον συνορίζουσ᾽ ἐστὶ γῆν
Καὶ πᾶσι τοῖς Ελλησιν ἀγνοουμένην.
Πρώτους δὲ παρὰ τὸν Ιστρον εἶναι Καρπίδας
Ειρηκεν Εφορος, εἶτ᾽ Αρωτῆρας, πρόσω
Νευροῦτας, ἄχρι γῆς ἐρήμου διὰ πάγων.
Πρὸς ἀνατολὰς δ᾽ ἐκβάντι τὴν Βορυσθένην.
Τοὺς τὴν λεγομένην Υβλαν οἰκοῦντας Σκύθας
Εἶναι δὲ Γεωργοὺς ἐχομένους τούτων ἄνω.

Dicam in compendio, qui populi Scythici, quibus regionibus coluerint Ephori iudicio, teſtimonio Scymni Chii: nolo enim longum carmen hic accinere. Ad ipſum Maeotidos oſtium, quo in Pontum ſe exonerat lacus, Panticapaeum poſuit Ephorus. Graeca illa vrbs, a Mileſiis condita in Taurica cherrhoneſo. Cum addit Scymnus, Boſpori regiam, de ſua aetate admiſcuit Ephoro, vt dicam alias. Vltra iam Scythia vsque ad deſertas et incognitas terras: puta Scythas Regios et ſolitudinem Herodoti dici. Ad Iſtrum primi Καρπίδαι. Credo Ephorum dixiſſe, Καλλιπίδας Herodoti et ſcripſiſſe Scymnum carminis cauſſa Καλπίδας. Siti igitur iſthic fuere, vbi Herodoti Tiritae. Tum Aratores et ſupra eos Neuritae ad frigidam terrae plagam ſeu ſeptentrionem. Ad orientem Boryſthenis ſi excenſionem facias, Scythae, qui Hyblam incolunt primi, tum Scythae Γεωργοὶ ſeu Agricolae, inde iam vaſta ſolitudo ϗ ἔθνος ἀνδροφάγων Σκυθῶν, prorſus vt Herodoti aetate, praeterquam quod hic Androphagos Scythico nomine eximit. Tum ponit Ephorus:

Τὸν

Τὸν Παντικάπη διαβάντι Λιμναίων ἔθνος,
Ετερά τε πλείονα ἐ διωνομασμένα,
Νομαδικὰ δὲ ἐπικαλέμενα.
Si Panticapen fluuium traiicias, gentem Limnaeam (paludis accolam)
Aliasque complures nomine haud notas ſuo,
Nomadicas cognomine.

Panticapen dixit Herodoti fluuium, qui in Boryſthenem ſeſe exonerat, quo transmiſſo, Nomades Scythae: nec imperite Λιμναίες ſiue Ephorus vocauit, ſiue Scymnus, quia ſupra Maeotin praetenduntur. Addit deinde, admodum bonos eſſe, nec iniuriam inferre vel homini vel alii animanti, in plauſtris oberrare, lacte victitare, opes omnium rerum habere communes, inde Anacharſin veniſſe, inde in Aſiam tranſiiſſe, vt fama ferat, Sacas. Celebrari item Sauromatas, Gelonos, Agathyrſos. Ad Maeotin Maeoticas gentes eſſe et inde Tanaim, qui vsque ab Araxe fluat: puta eum dicere Herodoti illum Araxem ſeu Volgam. Scymnus hoc admiſcuit, nam

Ως δ' Εφορος ἱςόρηκεν, ἐκ λίμνης τινὸς,
Ης τὸ πέρας ἐςὶν ἄφρασον,

vt Ephorus tradidit, Tanais e palude longinqua et ignota deſcendit, quod ipſum eſt ex Herodoto. Hic iam in Aſia duo ſtadiorum millia tenuere Sarmatae ad Tanaim, Maeoticae gentes dicti Ephoro, olim Amazonibus permiſti: diuerſas a Sarmatis Maeoticas nomine Ιαζαμάτας edidit Demetrius Calatianus. Hic Ephorus primus fuit, qui orbem terrarum ſcriberet in quatuor populos diuiſos: Indis oppoſitos ad ſeptemtrio-

trionem eſſe Scythas, Aethiopibus Celtas. Fragmentum Ephori inſigne Coſmas Aegyptius Indicopleuſtes in Topographia chriſtiana nobis conſeruavit, ex quo hoc cognoſcimus. (*) Easdem rationes Scymnus Chius in περιηγήσει ſectatus eſt, quam Iſaacus Caſaubonus primus ex tenebris eruit vt incerti

(*) Ex p. 148. & Montfacon. hoc inſigne fragmentum apponam: Τὸν μὲν ἀπηλιώτην καὶ τὸν ἐγγὺς ἀνατολῶν τόπον Ἰνδοὶ κατοικοῦσι, τὸν πρὸς νότον καὶ μεσημβρίαν Αἰθίοπες νέμονται, τὸν δ' ἀπὸ ζεφύρου καὶ δυσμῶν Κελτοὶ κατέχουσι. τὸν δὲ κατὰ βορρᾶν καὶ τὰς ἄρκτους Σκῦθαι κατοικοῦσιν. Ἐστιν μὲν οὖν οὐκ ἴσον ἕκαστον τούτων τῶν μερῶν, ἀλλὰ τὸ μὲν τῶν Σκυθῶν καὶ τῶν Αἰθιόπων μεῖζον, τὸ δὲ τῶν Ἰνδῶν καὶ Κελτῶν ἔλαττον, καὶ παραπλήσιον ἑκατέρων, ἀλλήλους ἔχει τοῦ τόπου τὸ μέγεθος. οἱ μὲν γὰρ εἰσὶ μεταξὺ θερινῶν καὶ χειμερινῶν ἀνατολῶν. Κελτοὶ δὲ τὴν ἀπὸ θερινῶν μέχρι χειμερινῶν δυσμῶν χώραν κατέχουσι. καὶ τοῦτο μὲν ἴσον ἐστὶν ἐκείνῳ τῷ διαστήματι καὶ μάλιστά πως ἀντικείμενον. ἡ δὲ τῶν Σκυθῶν κατοίκησις τοῦ μὲν ἡλίου τῆς περιφορᾶς τὸν διαλείποντα κατέχει τόπον, ἀντίκειται δὲ πρὸς τὸ τῶν Αἰθιόπων ἔθνος, ὃ δοκεῖ παρατείνειν ἀπ' ἀνατολῶν χειμερινῶν μέχρι δυσμῶν τῶν βραχυτάτων. Nam Indi ad Apelioten ſub oriente degunt; Aethiopes ſub noto et meridie; ſub occidente Celtae, ſub ſeptemtrione Scythae. Non aequales inter ſe hae partes ſunt. Scythae et Aethiopes maiorem tractum incolunt: Indi et Celtae minorem: tractus autem illi inuicem in magnitudine ſuccedunt. Indi enim intra aeſtiuum et hibernum occidentem: Celtae intra aeſtiuum et hibernum occidentem: hique tractus pari ſunt magnitudine et maxime ſibi e contrario ſiti: at *Scythae* regiones tenent eas, a quibus ſolis iter maxime remotum & Aethiopes e regione eorum ſiti ab occidente hiberno, vsque ad breuiſſimum occidentem tendunt.

ti auctoris, Hoeſchelius protulit vt Marciani, Doduellus et Hudſonus ſuo nomiui reſtituere. Ex hac ὑποθέσει, quae quaſi iuuandae memoriae cauſſa ab Ephoro aut ab alio quodam ante eum reperta eſt, omnium gentium ad occidentem Europae et in Aſia ſeptemtrionali confuſio in vnum Scythicum nomen orta eſt. Neque vno ſeculo, ſed omni aeuo exſtitere, qui nouas gentes in Scytharum cenſum referrent:

quippe his creſcunt patrimonia fabris.
Sed creſcunt quocumque modo, maioraque fiunt
Incude aſſidua, ſemperque ardente camino.

Alexander Philippi filius cum Illyriis, Panonibus et Thracibus Triballisque initio regni bellum geſſit, nulla memorabili cum Scythis pugna. Appiani Illyricorum vetus interpres: (7)*Paeones natio ingens circum Iſtrum per longum incolens, ab Iapodum populis ſupra Dardanos protenditur. Hi Paeones a Graecis, a Romanis Pannonii appellantur et ab illis, vt praemiſimus, inter Illyrios annumerati ſunt, de quibus nunc mihi Illyriorum res recenſenti videtur differendum: glorioſi hi admodum ob Macedonum Agrianos, qui potiſſimum Philippo et Alexandro in bellis, praeſtiterunt, quoniam et hi Paeones fuere ex his, qui inferiora incolunt, ab Illyriis coloni editi.* Graeca Illyrica, quae, quod miror Alexandrum Tollium multosque alios fugiſſe, a Dauide Hoeſchelio ex MSS Auguſtanae reipublicae ſunt edita, (8) quaeque poſſideo ipſe, ſic ha-

(7) p. 1202. ed. Tollii (8) A.C. 1599. in 4to p. 8.

habent :- (9) οἱ δὲ Παίονες ἐστὶν ἔθνος μέγα παρὰ τὸν Ἴστρον ἐπιμήκες ἐξ Ἰαπόδων ἐπὶ Δαρδάνους, Παίονες μὲν ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων λεγόμενοι καὶ Ῥωμαίοις Παννόνιοι. συναριθμούμενοι δὲ ὑπὸ Ῥωμαίων τῇ Ἰλλυρίδι, ὡς προεῖπον, διὸ καὶ περὶ τῶνδε μοι δοκεῖ νῦν κατὰ τὰ Ἰλλυρικὰ εἰπεῖν. ἔνδοξοι δ' εἰσὶ κατὰ Μακεδόνων δὶ Ἀγριᾶνας οἱ τὰ μέγιστα Φιλίππῳ καὶ Ἀλεξάνδρῳ κατεργασάμενοι, Παίονές εἰσι τῶν κάτω Παιόνων Ἰλλυριοῖς ἄποικοι. Ita multa alia ſunt in Illyricis Graecis, quae ab hac interpretatione veteri longe diſcrepant. Sed hoc nunc non agimus. Vt tum res erant, commemorante Arriano, (10) Iſter ad quem Alexander venit, populos fortiſſimos diſcernebat. Ipſis in fontibus τὰ πολλὰ Κελτικὰ *plerique Celtae* et extremi eorum Quadi atque Marcomanni, tum Gaetae ac Σαυρομάτων μοῖρα ſuper Getis et ſuper Sauromatis Ἰάζυγες, denique Scythae, vbi Iſter quinque oſtiis in Pontum exoneratur. Cum eas res ad Iſtrum gereret Alexander aeſtate, eodem autumno reuocatus eſt in Macedoniam, quod Clitus Bardylis filius et Glaucia Taulantiorum rex defectionem agitarent. Inde ille in Graecos et Perſas. Per Zopyriona ducem, quae patrata ſint, quam occaſionem fabulis dederint, in Muro Caucaſeo declaraui. In ceteris, quae de Scythis traduntur in rebus Alexandri nihil magni pretii et ſine commento eſt, praeter quam cum dicuntur ab Iſtro coluiſſe vsque ad Tanaim.

(10) p. 8. ed. Blanc.

ELF-

ELEMENTA LITTERATVRAE BRAHMANICAE TANGVTANAE MVNGALICAE.

T. S. Bayer
Regiomontanus.

POſtquam Daniel Meſſerſchmidius Gedanenſis, Medicinae Doctor, A. C. cIↃIↃcc xxvii. ex Siberia rediit Petropolin, vt a Petro Magno eas in regiones miſſus fuerat, ad naturae artisque ſecreta perueſtiganda, ita ſingulari diligentia conquiſita et obſeruata multa Academiae Imperatoriae tradidit. In his fuit libellus oblongus, quales ſunt plerique Tangutani, Mungalici, Calmucici libri, foliis octo ſolutis, charta, vt mihi videtur, Coreana, quae bombycinae haud diſſimilis eſt et denſitate et ſi paullum teras, etiam ſcabritie. Vtraque cuiusuis folii pagina, inſcripta eſt ita, vt quo loco prioris paginae extrema eſt linea, iſthic, ſi vertas, poſterioris ſit caput. Sic, inquam, vertere te oportet ſingula folia, vt numeros pleroſque antiquos. Atque hic mos apud Brahmanes, Tangutanos, Mungalos, Malabares omnesque populos, qui in foliis arborum ſcribunt, obtinet. Ortus ex eo, quod veteres ſingula folia palmarum, quemadmodum nunc quoque fieri ſolet, per duo fo- Tab. XV-XXV.

ramina filo transiiciunt, vt vno in volumine contineantur, vbi commoditas ſuaſit, vt ſic folia euolverent, ſic inſcriberent. Id ipſum vero deinde obſeruatum eſt in chartis. Singulis in paginis duo ſunt ordines, ita vt vnusquisque prima in linea Brahmanicas litteras exhibeat, in altera Tangutanas, in tertia Mungalicas: quod nos commoditatis cauſſa mutauimus, vt ſingulis in paginis noſtris eſſent tres ordines. Liber non ſcriptus eſt, ſed typis excuſus. Nam etiam Tangutani et Mungali artem typographicam a Sinis acceperunt. Exſtant, vt audio, apud Celſiſſimum Principem Alexium Michaelis filium Czerkaskium, bonarum artium Maecenatem, eiusmodi ligneae formae, quibus hi populi vſi fuerunt. Attamen is liber, quem a Meſſerſchmidio accepimus, non alibi, quam in Sinis excuſus fuit. Teſtimonio eſt, quod priori in pagina cuiusque folii ad ſiniſtram in margine primum numerus Brahmanicus, tum Tangutanus, tertio Mungalicus, quarto Sinicus inſcriptus eſt. Sinicus cum voce *xam* in hunc modum 上二 *xam vl*, *xam ſan*, *xam lo* et deinceps. In poſteriori vero pagina nulli numeri exſtant, tantummodo inſcriptus eſt Sinicus character 下 *hia.* Atque vt in libris Sinicis *xam* ſignificat *priorem ſolii paginam*, cui numerus adiungitur, ita *hia*, *poſteriorem* ſine numero. Is autem vſus

Brahma-

Brahmanicorum elementorum in Sinis eſt, quem ſuperſtitio a Brahmanibus, Tangutanis, Mungalis in regnum aduecta ad interpretandos ſacrorum ſuorum libros requirit. Nam Brahmana ſuperſtitio ita in Tangutana et Tibetana continetur, vt huic etiam aliquid a chriſtiana Neſtorianorum religione admiſtum ſit. Quare non eſt mirandum, Brahmanum litteraturam et libros apud hos etiam populos in honore eſſe, et ad Lamarum Bonziorumque ſacerdotum cognitionem pertinere. Et Brahmanicae quidem litterae, vt prima in linea ponuntur, ita norma ſunt et regula horum elementorum. Nam neque apud Tangutanos, neque apud Mungalos, omnes illae litterae, quae hic ſpectantur, vſurpari vulgo ſolent. Immo quaedam tantummodo in Brahmanicis Indicisque vocibus ſcribendis adhibentur, non in Tangutanis et Mungalicis. Neque hic ordo alphabeti Mungalici eſt, ſed alius plane, vt ſuo loco et tempore demonſtrabo: an Tangutani idem vulgo ordo ſit, qui Brahmanici eſt, dicere non poſſum. Quare totum hoc comparatum maxime eſt ad Brahmanicae litteraturae illuſtrationem. Voluptati mihi in primis fuit, litteras tam reconditas contemplari, et credidi, poſſe iis explicatis aliquem etiam maiorem fructum deinceps ſperari. Sed, hic *Rhodus hic ſalta*, ſaepe mecum cogitaui ipſe. Meſſerſchmidius negabat mihi, haruncce litterarum rationem ſatis ſe recordari poſſe et occupationes ſuas obiiciebat, iuſtam ſane excuſandi cauſſam: at magiſtrum quem alium aut vnde nanciſcerer? Venit

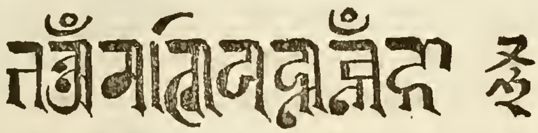
mihi in mentem, quod anus Alexandrina monebat Syracuſias Theocriti; *ἐς Τροίην πειρώμενοι ἦλθον Ἀχαιοὶ, πείρᾳ θὴν πάντα τελεῖται.* Feci periculum, quod, quemadmodum proceſſerit, dicam poſtea: nam de litteris ipſis nonnulla praefanda duco.

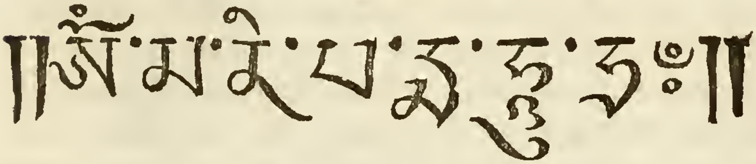
Brahmanes in veteri Indica lingua *Kirendum* (1) has litteras adhibent et ſedulo occultant, ne extra collegia ſua efferantur. Primus, quod ſciam, Henricus Rhodius Ieſuita, cuius iter Indicum Athanaſius Kircherus deſcripſit, (2) aliquantum litterarum accepit a Brahmane ſibi deuoto et cum Kirchero communicauit, qui eas ex Rhodii autographo in *China illuſtrata* edidit. *Cum*, inquit, *P. Henricus Roth iis ad veram ſalutis ſemitam deducendis totus intentus, ſine lingua et litteratura eorum id veluti ἀδύνατον videret, per quendam Brahmanem ſumma beneuolentia ſibi deuinctum et iam ad Chriſti fidem ſuſcipiendam inclinatum totam et linguae et litteraturae philoſophandique rationem litteris hiſce conditam, ſex annorum impenſo ſtudio conſecutus eſt.* Si quis litteras, quas Kircherus edidit, conferet cum his noſtris, is ſentiet, obſcuros in iſtis pleroſque eſſe ductus atque confuſos et minimam litterarum partem Rhodio fuiſſe explicatam. Ex Kirchero Andreas Mullerus Greiffenhagius Brahmanicas litteras alphabetis ſuis in-

---

(1) Sic eam frequenter vocant Danici Miſſionarii in epiſtolis ad amicos. Thomas Hyde in Ludis orientalibus l. 1. p. 94. et in Hiſtoria religionis veterum Perſarum p. 521. Sanſcroot vocat, Athanaſius Kircherus in China illuſtrata Hanſeret et Andreas Mullerus Greiffenhagius ex eo alphabetum Hanſcriticum (2) Kircherus l. c. p. 90. ſeq. qui eum etiam Roth nuncupat.

inſeruit. Has quoque litteras Eduardus Bernardus in *Orbis eruditi litteratura* proxime ſecundum Arabicas a Samaritanis litteris deriuare inſtituit. De origine harum litterarum aliarumque in India dicam alias. Eſt autem harum litterarum tamquam ſanctarum vſus omnium in linguis populorum, qui Indica ſuperſtitione ſunt infecti. Exſtant in Muſeo Imperatorio apud Academiam vexilla ſepulcrorum ſeu epitaphia e Dauria aduecta a Meſſerſchmidio, inſcripta modo his Brahmanicis litteris, modo Tangutanis:





&c.

Tangutana: *Ong ma ni pa dme chum chi.* Clariſſimus Meſſerſchmidius in Iſidis Sibericae Xenio MS. oſtendit, preces eſſe Tangutanorum vulgatiſſimas, *miſerere noſtri Deus.* Haec formula quibusdam in vexillis ligneis ſepulcrorum vel decies occurrit repetita, tamquam ſymbolum religionis prauiſſimae optimum. Sunt autem praeter litteras has Brahmanicas maiores, aliae etiam minores, quas praeter Meſſerſchmidium haud ſcio an quiſquam alius homo in Europa cognouerit. Sola autem ductuum celeritate et compendio a maioribus differunt, vt fere ſunt pleraeque Kircherianae.

Iis-

Iisdem Thomas Hyde in Ludis orientalibus nomina elephanti edidit. Et quemadmodum has litteras Brahmanes profanis in rebus non adhibent, ita Indi multa alia habent litterarum genera. Nullum autem magis in Europa notum, quam Malabaricum opera Bartholemaei Zigenbalgii clariſſimi viri et ceterorum Miſſionariorum. Non minor ſpes in Varugicis, poſtquam eas ſolertiſſimus in piis laboribus Beniamin Schultius Madraſae tractandas ſuſcepit, fore vt in Europa amplius cognoſcantur. Mihi quidem Mungalicis minoribus ſimiles videntur, praeterquam quod χαμαιφόρως non ſunt ſcriptae. (3) Eundem in modum Bengalicae litterae propiores ſunt Tangutanis, nondum tamen ſatis cognitae. At obſcuriſſimae ſunt Ceylanenſes, Iauanae, Siamicae. Siamenſes litteras in primis illuſtrandas ſuſcepit Geruaſius Praepoſitus de Sotobrio S. Martini Turonenſis, poſtquam ab Siamo in Galliam rediit: (*) ſed intercicidit illa eruditis opera. Indi, qui Mahumetanae ſuperſtitionis ſunt, Arabicis vtuntur etiam Indicis in linguis. Qui propiores ſunt Sinis in Tunkino, Cochinchina, Caubango, Ciampa, Camboia, Lais et ipſi Siamenſes, quos omnes vulgo in Indis recenſent, cum potius ſint Tibetanae et Sinicae cognationis, Sinicis quoque characteribus ſcribunt. Aucto-

---

(3) Vide earum ſpecimen in XXV. continuatione des Berichts der Koeniglichen Daeniſchen Miſſionarien in Indien ad pag. 106. (*) Ludouicus Thomaſſinus in praefatione Gloſſarii Vniuerſalis Ebraici p. 83.

ctorem habeo Alexandrum de Rhodes (4) qui ita fatus eſt: *non agimus hic de characteribus, quibus Tunchinenſes ſeu Annamitae vtuntur in ſuis ſcriptionibus, qui ſunt difficillimi et paene innumeri, praecipue ii quibus ſuos conſcribunt libros, qui ſunt iidem ac Cinenſes* (Sinenſes) *et ad numerum octuaginta millium peruenire dicuntur: totamque vitam in iis addiſcendis inſumunt illae nationes, nec tamen vllus vmquam ad omnium perfectam notitiam peruenire conſueuit.*

De Tangutanis litteris dixi in epiſtola ad Ioannem Samuelem Strimeſium,(5) et in alia ad Ioannem Burkardum Menkenium, (6) viros ampliſſimos. Nunc, quaſi mihi deſponſa et deſtinata haec prouincia ſit, certiora dare poſſum. Monendum hoc loco duxi, Nicolaum Vitſenium in prima editione Orientalis et Septemtrionalis Tattariae, Tangutanas quaſdam edidiſſe litteras; paucas vero et deprauatas, in altera editione easdem praetermiſiſſe. Exſtant libri in Muſeo Imperatorio et ſpes eſt hac opera noſtra ad interpretationem eorum alios excitatum iri, niſi nobis huiusce rei maior forte copia obtinget. Quod quidem eminentiſſimus Theophanes Archiepiſcopus Nouogrodienſis, pro ſuo in chriſtianam rem ſtudio, et ſaepe priuatim optauit, et nuper publice, in conſilio de inſtituenda regia iuuentute. Habent praeterea Tangutani minores litteras, quas doctis-

(4) In linguae Annamiticae ſeu Tunkinenſis breui delineatione p. 2. (5) In der Hiſtorie der Gelehrſamkeit parte V. p. 385. anno 1722. (6) In Supplementis Actorum Lipſienſium A. 1725. t. IX. ſect. I. p. 20.

doctiſſimo Meſſerſchmidio aliquando orbis eruditus debebit : ſunt enim illi ſoli notae. Specimen earum Thomas Hyde in hiſtoria religionis veterum Perſarum (7) dedit , tamquam ſcripturae Tatarorum *de Boutan* , vt ipſe vocat. Vt me docuit Meſſerſchmidius , Tangutani populum ſuum nomine

བོད་ཡིད་ *Vod jid* appellant. Tangutanum nomen ipſis ita ignotum eſt vt Sinicum Sinis. Nos iſthuc a Perſis et Arabibus accepimus qui تنكوت *Tankut* et تنكو *Tancu* ſcribunt , et a Guilielmo Rubruquis , a Marco Paulo Veneto, Haithone Armeno. In Abulgaſo Bahadurchano , vbi verſio Gallica (8) *Tanguth* habet in MS. eſt تايكغوة نى بلالى *Tainkutnenſis regio.* De prouincia *Tebeth* quae Marcus Paulus Venetus habet , (9) nota ſunt. Apponam tamen verba eius ex editione altera non item inter eruditos nota , quam ipſe poſſideo: *transactis autem praefatis quinque diebus inuenietur prouincia Tebeth, quam magnus Kaam praeliando et expugnando deuaſtauit. Multae enim ciuitates ſunt ibi deſtructae et caſtra diruptae: protenditur autem in longum prouincia per dietas XX et quia ſic eſt in ſolitudinem redacta, oportet vt per viginti dietas viatores omnes victualia ſecum ferant. Inſuper quia habitatoribus caret , ſilueſtres fere ſupra modum ibi*

(7) Tabula XVII. Aliud occurrit in Philippi Ioannis Strahlenbergii Nord und Oſtlichen Theil von Europa und Aſia tab. I. (8) p. 42. (9) l. II. c. 37.

ibi multiplicatae ſunt propter quod periculum magnum valde et inde tranſitum facere et maxime de nocte. Habent tamen marcatores et viatores ceteri. De Tanguth autem : (2) *completa vero via deſerti praefati peruenitur ad ciuitatem Sachion, quae eſt in introitu prouinciae magnae Tanguth, vbi ſunt pauci chriſtiani Neſtorini.* Sic et MS. Berolinenſe, pro quo altera editio *Taguth.* Vetus autem editio,vt cum MS. Berolinenſi prorſus congruit, ita ab Baſileenſi et Mulleriana diuerſa, diuerſum interpretem nacta eſt. Nulla vel typographiae vel temporis nota meo in libro : at coniungitur cum duobus aliis eius generis eodem plane typo, quorum vnius hic exitus eſt:*Explicit itinerarius a terra Angliae in partes Hieroſolimitanas et in vlteriores transmarinas, editus primo in lingua Gallicana a Domino Iohanne de Mandeuille milite ſuo auctore. Anno incarnationis Domini MCCCLV in ciuitate Leodienſi et paulo poſt in eadem ciuitate translatus in dictam formam latinam. Quod opus vbi inceptum ſimul et completum ſit,ipſa elementa ſeu ſingularum ſeorſum caracteres literarum, quibus impresſum vides Venetica,monſtrant manifeſte.* Meus codex verſionem continet ab Franciſco Pepuris ex Italico procuratam. Sic enim interpres praefatur : *Librum prudentis honorabilis ac fideliſſimi viri domini Marci Pauli de Venetiis de conditionibus orientalium ab eo in vulgari editum et conſcriptum compellor ego frater Franciſcus Pepuris de Bononia fratrum Praedicatorum a ple-*

(10) l. I. c. 45.

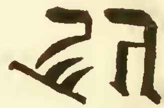
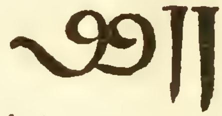
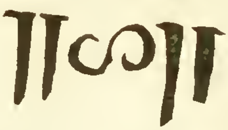
riſque patribus et dominis meis veridica ſeu verifica et fideli translatione de vulgari ad latinum reducere , vt qui amplius latino quam vulgari delectatur eloquio nec non et hii qui vel propter linguarum varietatem omnimodam aut propter diuerſitatem idiomatum proprietatem linguae alterius intelligere omnino aut faciliter nequeant aut delectabilius tegant ſeu liberius capiant. Porro per ſe ipſos laborem hunc quem me aſſumere compulerunt perficere plane non poterant ſed altiori contemplatione vacantes et infimis ſublimia praeferentes ſicut terrena ſcribere recuſarunt , et quae ſunt deinceps. Nam haec bona cum venia ὡς ἐν παρόδῳ, publicae notitiae cauſa , attingere non abſurdum nobis viſum. Vox ſine dubio Sinica, ſiue *Tan cu* ſiue *Tien cu*, itaque incertae adhuc ſignificationis. Frequentius tamen regio ab Arabibus et Perſis, vt ab Vlugbego et Naſſireddino et Eledriſo تبت *Tebbetb*, *Tobit*, *Tobt* , *Tibet* vocatur, notum etiam Marco Paulo Veneto et Ioanni de Plano Carpini nomen. Chryſococcas ΤΕΜΠΙΤ hoc eſt *Tepit*. Ea enim ratione orthographiae eſt in huius Perſae Graeca verſione , vt ΜΠΑΛΧ pro Βαλχ , ΜΠΟΥΧΑΡΑ pro Βȣχαρα. Inuenio etiam ΤΟΥΠΑΤΑ. Nam Symeon Magiſter Antiochiae cognomine Sethus περὶ δυνάμεων τροφῶν (8) ſic ait: τȣ̃ μόσχȣ διάφορα εἴδη εἰσὶν, ὧν ὁ κρεῖτον γίνεται ἐν πόλει τινὶ τῆς χοράσῃ ἀνατολικωτέρα λεγομένη τȣ́πατα, *Moſchi diuerſae ſunt ſpecies, quae Choraſe* (Choraſan prouinciȩ) *nomine Tupata*. Mungalorum ſcriptura item duplex eſt , alia haec ipſa grandiuſcula , alia minor et feſtinantibus aptior, quam Mangjuri in primis adhibent. Hanc minorem magis

(8) p. 41. ed. Gyraldi.

gis exploratam habeo, ita vt totam iſtius populi orthographiam explicare poſſim. Fructum huius operae toto quinto Commentarior. ſeruabo integrum. Quemadmodum minores litteras ex Syriacis Eſtrangelo factas demonſtraui, ita hae maiores ex minoribus ſunt ortae.

Vt autem haec elementa explicarem, primo Tangutana conſideraui. Contuli cum his alphabetum meum, tum Vitſenianum, tertium quod ante annos aliquot nobiliſſimus Vir et ampliſſimus Koeleſerus de Kereſeer Imperatori Romano a conſiliis in Tranſiluania e MS. itinerario ad Menkenium transmiſit: is deinde mecum communicauit. Poſtquam ex hisce bonam partem litterarum conſtitui, quales eſſent, Mungalica tractanda ſuſcepi ex meo alphabeto Lipſiae edito, tum ex Koeleſeriano, quae maiorum rationem litterraum magis, quam minorum continent, deinde cum minorum litterarum alphabeto, quod concinnaui ipſe, contuli. Adieci alphabeta Calmuccica varia. Ex his igitur alias litteras conſtitui, alias, quae ex comparatione cum Tangutanis notae erant, confirmaui. Denique alphabetum Brahmanicum Kircheri cum hoc noſtro contendi, vt omnia ab omni parte litterarum verae pronunciationi indagandae inſeruirent. Nihil dicam de quibusdam aliis minutis ingenii ſubſidiis. Vltima cura fuit ſyllabarum rationem explicare, vbi me Mungalicum alphabetum minus in primis, tum Brahmanica Kircheri iuuerunt.

Charta vtuntur ſane praeſtantiſſima, denſiorita-

tamen quam noſtra eſt, neque ita candida. Saepe caeruleo colore chartas inducant, nonnunquam et nigro, litterasque ſcribunt aureas vel albas. Vnumquodque folium Brahmanes ab hoc ſigno  ordiuntur: Tangutani autem iſto  quod *Vtſchum* vocatur et tum in principio tum in fine hoc modo etiam ſcribitur  et tertio modo ſicuti in Actis Lipſienſibus edidi, nolui enim inde omnia repetere, ne faſtidio eſſem. In poſteriori pagina nullum tale ſignum exſtare ſolet. In iſtis duobus characteribus Brahmanicis dimidia pars vniuscuiusque proprie finem ſuperiorum, altera principium ſequentium ſignificat: apud Tangutanos vero in duabus lineis perpendicularibus, cum ſolae exſtant, alterum fini praecedentis vocis, alterum principio ſequentis ſignum adiungitur. Ortum eſt hoc ſignum e Brahmanico commate, quod in prima tabula ſepties occurrit. Vna eiusmodi linea item apud Tangutanos commatis officio inſeruit. Punctum

ctum Tangutanum eſt  vbi etiam extrema linea principium ſequentium demonſtrat. Brahmanicum vero punctum idem illud ſignum eſt, quod in principio poni diximus. Mungali nullo ſigno initia periodorum notant: at priorem cuiusque folii paginam, ſupra primam lineam poſito hoc ſigno,  a Tangutanis, vt videtur, accepto, a poſteriori diſcernunt pagina. Comma Mungalicum eſt,  Punctum eſt  vel  Vtrumque infra extremam litteram. In priori tantummodo cuiusque folii pagina ad ſiniſtrum marginem tum numeri, tum titulus inſcribuntur.

Iam primo omnium in elementis Brahmanicis, quindecim exſtant figurae, quae fere ſunt ſimiles Aethiopico *Alph*: nam per ſe pronunciatur primum *a* breue, ceterae deinceps figurae induunt naturam ductuum quibuscum ſunt deuinctae, vt tamquam vocales pronuncientur *a* longum *i* breue et longum et deinceps. In his *re* et *le*, quae nobis vocales non ſunt, apud Brahmanes cum conſonantibus connexae, vt *bre mle kre ſle*, vocales eſſe cenſentur. Eadem ratio obtinet in Tangutanis et Mungalicis, praeter-

quam

quam quod *re* et *le* vocales ex eadem figura ſeu ex vocalis *a* charactere non exiſtunt: ſunt enim conſonantes *r* et *l* cum vocalium *e* breuis et *e* longi ductibus. Sexta et decima eadem eſt plane, quae prima, niſi quod in Mungalicis ſubiectum habet punctum. Eundem in modum in ceteris ſyllabis, prima etiam in fine ponitur hoc noſtro in libello: nos id praetermiſimus, quia vtilitatem habet nullam: videtur autem ea cauſſa factum: vt punctum Mungalicum ſubiici poſſet, ita, vt ne videretur ad vltimae vocalis formam pertinere. Omnes vocales ſunt vel breues, vel longae, praeter *ang*. Haec enim tantummodo breuis eſt in paradigmate. Gutturalem vocalem hanc proprie dixeris, neque enim vt noſtrum *ang* plane pronunciatur, neque vt pronunciatur, noſtris litteris ſcribi poteſt. Nam in gutture ita formatur, vt *ng* non exprimat, ſed quodammodo referat ſono. Fere vt Aethiopicum et Arabicum *Ain*. Hanc vero vocalem, quam proprie circellus in apice efficit, cum aliis quoque copulant vocalibus, *ang*, *ing*, *vng*, *eng*, *ong*, et deinceps, quod hoc in alphabeto praetermiſſum eſt. Vocales Mungalicae forma ſua tantummodo in eo differunt a conſonante *n*, quod *n* a latere punctum appoſitum habet, vocales non habent.

Sequuntur omnes conſonantes ſine vocalibus, per commata ſuas in claſſes diuiſae: extrema eſt duplex conſonans. Apud Tangutanos vndecimae et decimae tertiae eadem forma eſt: diuerſa apud Brahma-

manes et Mungalos. Apud Mungalos vero ſecunda et tertia, decima ſexta et decima octaua, viceſima prima et viceſima tertia eaedem ſunt litterae: Brahmanicae et Tangutanae cum his comparatae diuerſis formis. Haec primae noſtrae tabulae facies, In reliquis nouem tabulis, hae ipſae conſonantes, ſuis cum vocalibus deuinctae procedunt. Iterum extrema omnium eſt conſonans duplex. Hanc extremam excipiunt multae aliae duplices, quas tomo quarto Commentariorum ſeruamus, ne hic tomus mole obruatur.

Quoniam librum Vitſenianum ſupra citauimus, eum autem et a Leibnitio Vitſenii amico (1) et a multis aliis deſiderari video, tum amicos exteros mirari, quid id ſit, quod tomo primo Commentariorum ad eum prouocauerim, monendi ſunt eruditi, duplicem editionem in Bibliotheca Imperatoria exſtare. Prima exiit A. C. cIↃ IↃC XCII. altera A. cIↃ IↃCCV. *Nord en Ooſt Tartarye of te bondig Ontwerp van eeniger dier Landen en Volken door Niclaes Witſen.* Secunda editio adiectum nomen bibliopolae habet, quod in prima non exſtat: *Twede druk t'Amſterdam by François Halma Boekverkooper op de Nieuwen-dyk.* Prima editio continet parte priori paginas 142, parte poſteriori paginas 600. In altera editione tota priori parte omiſſa, poſterior ſola exſtat, in duas diuiſa partes: prima pars paginas 503 comprehendit; conſequitur ſecunda a pagi-

(1) de Numis Gratiani p. 322. ed. Fabricii.

pagina 504 vsque ad 968. Praetermiſſae quoque ſunt epiſtolae quorundam eruditorum ad Vitſenium quae in priori exſtabant, vt Gisberti Cuperi, qui A. C. cIↄ Iↄc LXXXIV. ita ſcripſerat: *ſed crucior immane quantum et angor animi, quod ea perſpiciam te eſſe modeſtia et verecundia, vt nolis partam inter eruditos famam augere, malisque frui tacita tam inſignium bonorum conſcientia, quam nomen tuum, ſi tamen illi adiici aliquid poteſt, magis magisque poſteritati conſecrare et aſtris inſerre.* Praetermiſſa quoque eſt altera Cuperi epiſtola A. C. cIↄ Iↄc LXXXVI. ſcripta et Ioannis Georgii Graeuii, in qua A. C. cIↄ Iↄc LXXXVIII. Montauſerio maxime auctore Vitſenium ad editionem Tatariae excitauit. Omiſſa alia multa: contra in poſteriori editione alia inſerta, in primis multarum linguarum huius ſeptentrionalis Europae & Aſiae lexica et ſpecimina, vt duae editiones, totidem diuerſa eiusdem auctoris opera eſſe videantur.

OBSER-

OBSERVATIONES

ASTRONOMICAE

TERTIA SERIES OBSERVATIONVM SATELLITVM IOVIS

IN OBSERVATORIO IMPERIALI PETROPOLI FACTARVM

per

I. N. DeL'Isle

Ex eo tempore quo his in regionibus commoror, quinque apparitiones Iouis contigerunt, quibus durantibus, quas potui obſeruationes eclipſium ſatellitum ejus inſtitui. Exbibitae iam ſunt obſeruationes trium praecedentium apparitionum in duobus Tomis Commentariorum antecedentibus; has excipiunt 2. poſteriores ad initium vsque menſis Iunii anni 1731.

Adhibui plerumque ad has vltimas obſeruationes Teleſcopium Anglicanum Catadioptricum, cuius inuentionis gloria Celeb. Newtono debetur; quodque ab artifice Anglicano in ſua arte præſtantiſſimo elaboratum erat. Speculum eius metallicum maius diametrum fere quinque cum dimidio digitorum habet, et focus 4 pedibus 10que digitis pedis Pariſienſis diſtat. Lens ocularis vitrea qua in pleriſque obſeruationibus vſus ſum, quoad focum quartam partem digiti non ſuperat; ita vt teleſcopium res obiectas ducenties et quod excurrit, augeat.

Saepiſſime ipſi integram ſpeculi maioris aperturam conceſſi; & percepi quod intimus Iouis ſatelles ſpatio quartae partis vnius minuti primi circiter prius emerſit in hoc teleſcopio quam in alio communi 13 vel 15 pedum longitudine. Secus accidit in Immerſionibus, quas ſcilicet 15 minutorum ſecundorum ſpatio et amplius tubo hoc reflectente proſequi poteram, cum in ſupra commemoratis 13 vel 15 pedum teleſcopiis eas videre non amplius liceret.

Simile mihi propemodum euenit in obſeruatione eclipſeos ſecundi Iouis ſatellitis, quod tertium vero ſatellitem attinet differentiam longe maiorem adeſſe animaduerti, quam tamen ob penuriam obſeruationum certo determinare huc vſque non licuit.

1729 Nov. ſt.	temp. ver.			
	h.	′	″	
Sept. 24	15	45	33	Immerſio tertii teleſcopio 13 pedum obſeruata. Satelles hic ante Immerſionem aliquot vicibus ex oculis ſe ſubduxerat, et iterum ſe conſpiciendum praebuit.
Dec. 7	13	1	45	Immerſio primi tubo 13 pedum.
8	13	41	6	Immerſio ſecundi tubo 13 ped. coelum non ſatis ſerenum erat.

Im-

1729 Nov. ſt.	temp. ver. H. ′ ″	
Dec. 21	15 42 36	Immerſio primi tubo 15 pèdum. coelo ſereno.
1730 Ian. 2	10 27 39	Immerſio ſecundi tubo 15 pedum.
16	15 29 40	Immerſio ſecundi teleſcopio 15 pedum dubia quoniam ſatelles Ioui admodum vicinus erat.
19	13 0 20	Quartus ſatelles valde diminutus in vmbram intrabat: Teleſcopium autem 13 pedum adhibitum fuit.
	13 1 50	In eodem teleſcopio non amplius viſibilis erat. Magna Iouis altitudo quae obſeruationem incommodam reddebat, vt et parua ſatellitis a Ioue diſtantia, obſeruationi obfuere. Tempus verum vnius ſolummodo horologii oſcillatorii ope cognitum fuit.
Febr. 23	11 56 56	Emerſio primi obſeruata tubo 13 pedum. tempus verum vnum ſaltem horologium monſtrabat.

1730 Nov. ſt.	temp. ver. H.	′	″	
Febr. 28	9	52	34	Emerſio ſecundi teleſcopium 13 pedum.
Mart. 1	10	22	12	Emerſio tertii eodem teleſcopio obſeruata
14	15	8	56	Emerſio ſecundi mediante eodem tubo viſa. Tempus verum adhibito vno ſolummodo horologio cognitum fuit.
27	8	38	22	Emerſio primi tubo 13 pedum tempus verum duo horologia oſcillatoria monſtrabant.
27	13	12	31	Immerſio quarti tubo 13 pedum. ad tempus verum cognoſcendum duo horologia adhibebantur.
April. 8	12	26	15	Emerſio ſecundi teleſcopio 13 pedum obſeruata et tempus verum per duo horologia cognoſcebatur.
10	12	32	36	Emerſio primi. Tubus 13 pedum adhibitus.
19	8	58	48	Emerſio primi ope ejusdem tubi obſeruata. Tempus verum duo horologia exhibebant.
26	10	55	22	Emerſio primi mediante tele-

1730 Nov. ſt.	temp. ver. H. ′ ″	
April.		teleſcopio 13 pedum detecta fuit, duobus horologiis tempus verum oſtendentibus.
Maius 3	9 43 11	Emerſio ſecundi per tubum 13 pedum viſa: tempus verum duo horologia oſcillatoria conſpiciendum dabant.
12	9 15 17	Emerſio primi teleſcopiis 13 pedum et altero 15 pedum obſeruata tempus verum per duo horologia cognitum fuit.
19	11 10 2	Emerſio primi. Duo tubi alter 13 alter 15 pedum ad hanc obſeruationem adhibiti ſunt.

Numerus horologiorum in ſequentibus obſervationibus adhibitorum non erit expreſſus quoniam de tempore vero in omnibus ſatis conſtabat, tribus vel quatuor horologiis eum in finem adhibitis, quorum minimum tria etiam in eodem minuto ſecundo accurate conſpirarunt. Id ipſum quoque de ſupra commemoratis obſeruationibus, quibus numerus horologiorum non adſcriptus, intelligendum eſt, ſiquidem in his quoque tribus vel quatuor horologiis vſi ſumus quorum ad minimum tria idem temporis momentum ſatis accurate demonſtrarunt.

Octob.

1730 Nov. ſt.	temp. ver. H.	′	″	
Octob. 23	18	42	52	Immerſio tertii. Tubus 13 pedum.
Nov. 10	14	4	58	Immerſio primi tubus idem.
21	14	4	10	Emerſio tertii per tubum reflectentem viſa.
28	14	27	50	Immerſio tertii teleſcopio 15 pedum obſeruata:
Dec. 5	18	23	13	Immerſio tertii ad quam cernendam tubo reflectenti vſus ſum.
16	17	50	43	Immerſio ſecundi dubia ob nebulam eo tempore Iouem oculis interdum eripientem, hinc de vno vel duobus minutis primis non admodum certus eſſe potui.
1731 Mart. 5	16	46	7	Emerſio primi per tubum reflectentem obſeruata quae tamen me iudice ob nebulam moram iniicientem per aliquot minuta ſecunda ſerius accidit.
7	11	12	53	Emerſio primi ope tubi reflectentis coelo ſereno animaduerſa.
	11	13	9	Tubus 13 pedum adhibitus.
8	13	49	48	Emerſio ſecundi tubo refle-

1731 Nov. ſt.	temp. ver. H.	′	″	
				flectente vſus; caelum non adeo ſerenum habebam.
Mart. 14	10	56	37	Emerſio quarti adhibui tubum reflectentem, at ventus hanc emerſionem aliquot minutis ſecundis morari potuit.
	13	9	5	Emerſio primi. Tubus reflectens.
	13	9	20	Tubus 13 pedum, at ventus moleſtiam creabat.
23	9	5	47	Emerſio tertii per tubum reflectentem detecta.
	9	35	2	Emerſio primi per idem teleſcopium obſeruata.
April. 2	10	57	45	Emerſio ſecundi. Tubus anglicanus reflectens.
	10	57	57	Teleſcopium 13 pedum.
15	9	45	50	Emerſio primi per tubum reflectentem.
	9	55	0	Per tubum 15 pedum a Ioſepho Campani confectum.
22	11	51	50	Emerſio primi mediante tubo 15 pedum. Caelum admodum ſerenum erat, aliae autem circumſtantiae anſam praebuere iudicandi hanc emer-

1731 Nov. ſt.	temp. ver. H.	′	″	
				merſionem pluribus minutis ſecundis citius accidere potuiſſe.
Mai. 1	8	16	54	Emerſio primi. Tubus reflectens adhibitus. Crepusculum erat inſigne & ventus incommodo erat.
3	12	56	58	Immerſio quarti per tubum reflectentem percepta.
4	10	44	47	Emerſio ſecundi per idem teleſcopium obſeruata.
	10	45	9	Per tubum 13 & 15 pedum viſa. Caelum non ſatis ſerenum fuit.
5	9	8	43	Emerſio tertii tubus 13 pedum.
8	10	13	7	Emerſio primi eodem tubo obſeruata.
15	12	7	43	Emerſio primi. Tubus 13 pedum caelo non admodum ſereno adhibitus fuit.
31	10	24	46	Emerſio primi per tubum reflectentem obſeruata. Crepuſculum ſatis magnum aderat.
Iun. 5	10	26	52	Emerſio ſecundi. Tubus reflectens adhibebatur & crepuſculum admodum magnum erat.

Obſeruationes primi Satellitis Iouis HABITAE ARCHANGELOPOLI, cum deducta exinde Longitudine HVIVS VRBIS

Per

Ludouicum De L'Isle de la Croyere.

MAndatum Imperatoriae Maieſtatis die 24. Marti 1727 cum a ſupremo Senatu per Dom. Laurentium Blumentroſt, Praeſidem Acad. Scientiarum accepisſem, iter in terras Septemtrionales Ruſſiae ad promouendam Geographiam ſuſcepi, et hunc in finem omnes obſeruationes Aſtronomicas et Phyſicas, quas difficultas aeris et ſitus locorum mihi permiſerunt inſtitui. Praecipuus ſcopus huius itineris eo directus erat, vt in hac extremitate ſeptemtrionali Ruſſiae incumberem in obſeruationes accuratas Longitudinum et Latitudinum, vt mappae Geographicae harum regionum exinde poſſint formari. In obſeruationibus Latitudinum adhibui Quadrantem 18 pollicum in radio elaboratum ab inſigni artifice *Chapotot*; ope eiusdem inſtrumenti correxi quoque horologium meum quod minuta ſecunda monſtrabat, et quod in obſeruationibus longitudinum mihi inſeruiebat. In obſer-

vationibus Satellitum Iouis adhibui tubum viginti pedum; expertus vero ſum, longitudinem huius inſtrumenti plus obfuiſſe obſeruationibus quam profuiſſe, ob difficultatem quae oritur inueniendi loca apta ad eorum directionem, nec non ob ventos fere continuos, qui in his regionibus ſeptentrionalibus Oceano vicinis, ſpirant. Has ob cauſas plane impoſſibile mihi fuit vnicam harum obſeruationum inſtituere Colae, vbi non niſi miſera tuguriola Ruſſorum et Lapponum inueniuntur, ac vbi ventus vehemens aeque eſt atque frequens. Felicior Archangelopoli fui, dum aliquas ex his difficultatibus vici, in ſequentibus tribus obſeruationibus quas recenſere inſtitui. Inter eas vero non niſi vnica occurrit, quae Petropoli facta fuit. Sunt autem ad manus obſeruationes correſpondentes aliarum Europae vrbium, quarum differentiaLongitudinis a Petropoli in poſterum exacte poterit determinari, et vnde conſequenter etiam ſemper patebit differentia reſpectu Archangelopolis, ea exactitudine qua obſeruationes ibidem factae ſunt. Quamuis autem nondum plena certitudo habeatur differentiae Meridianorum inter Petropolin et alias vrbes quarum obſeruationes correſpondentes affero, tamen tentaui facere has comparationes aſſumendo differentiasMeridianorum, quantum licuit, vero proximas, hoc eſt, ortas et ſelectas ex maximo numero obſeruationum immediatarum, quae in illis locis, ad Petropolin comparatis factae ſunt. En ergo obſeruationes meas cum ſuis comparationibus, in quibus e-

rit

rit obſeruandum, quod ex meis tribus ſolis obſeruationibus, quinque differentes determinationes Longitudinis Archangelopolitanae deduxerim, vt eo magis de ea certus eſſe poſſim.

Prima Determinatio.

N. S.		H.	′	″	
1728 Febr.	25	7	58	32	Emerſio primi Satellitis ♃is obſeruata Archangelopoli.
		7	24	10	Eadem obſeruata Petropoli.
			34	22	Differ. inter Archang. et Petrop.

Secunda Determinatio.

		H.	′	″	
Febr.	25	7	58	32	Eadem quae ante Archang. facta.
		6	16	31	Eadem obſerv. Berolini a Clariſſ. Dom. Kirchio.
		1	42	1	Differ. inter Archang. et Berol.
		1	8	0	Differ. Berol. et Petropolis ſupp.
			34	1	Differ. deducta inter Archang. et Petropolin.

Tertia Determinatio.

		H.	′	″	
Mart.	3	9	56	25	Emerſio primi obſerv. Archang.

		H.	′	″	
		7	6	17	Ead. Madriti a R. P. Grammatici et reducta ad eundem tubum quali Archangelopoli vſus ſum.
		2	50	8	Differ. inter Archang. et Madritum.
		2	16	0	Differ. ſupp. inter Madritum et Petropolin.
			34	8	Differ. deducta inter Arch. et Petrop.

Quarta Determinatio.

		H.	′	″	
Mart.	26	10	17	34	Emerſio primi obſerv. Archangelopoli.
		8	35	42	Eadem obſ. Berol. a Clariſſ. D. Kirchio.
		1	41	52	Differ. inter Archang. et Berolinum.
		1	8	0	Differ. ſuppoſ. inter Berol. et Petrop.
			33	52	Differ. deducta inter Archang. et Petrop.

Quinta Determinatio.

		H.	′	″	
Mart.	26	10	17	34	Emerſio primi obſerv. Archangel.
		8	32	7	Eadem obſeruata Romae.

Differ.

1 45 27	Differ. inter Romam et Archang.
1 11 40	Differ. inter Romam et Petrop. ſupp.
33 47	Differ. deducta inter Arch. et Petrop.

Media inter relatas quinque determinationes erit quam proxime $34' 0''$; quae haberi poteſt vera differentia longitudinum Petropolitanae et Archangelopolitanae, dum in poſterum exactior haberi poſſit: (ſi mutandum aliquid occurrat in differentiis meridianorum Berolini, Madriti et Romae reſpectu Petropolin.) Eadem differentia inter Archangel et Petrop. reducta in partes circuli efficit 8 gradus cum ſemiſſe, quibus Archangelopolis Petropoli eſt orientalior.

DE-

DETERMINATIONES LATITVDINVM

Variorum Locorum

RVTHENICI IMPERII

in quibus partim

ALTITVDINES SOLIS MERIDIANAS,

partim quascumque Fixarum

TAM AVSTRALES QVAM BOREALES ALTITVDINES OBSERVAVIT

Lud. De L'Iſle De la Croyere.

CVm in praecedentibus quae ad Longitudinem determinandam inſtituiſſem obſervationes expoſuerim , iam in medium producam eas quae inſeruire poſſunt eruendis Latitudinibus eorum locorum in quibus obſeruare mihi contigit, Eae ſe excipiunt ſecundum ſeriem temporis initium faciendo ab iſtis locis vbi per aliquod tempus commoratus ſum ; diſpoſitaeque ſunt in tres columnas ; in earum prima ſunt altitudines meridianae prout obſeruatae fuerunt nulla adhibita ratione erroris inſtrumenti ; ſecunda exhibet Latitudines ex obſeruationibus deductas, et per errorem quadrantis emendatas; tertia autem columna, quae obſeruationes ſupra dictas comitatae ſunt, circumſtantias recenſet. Hiſce in obſeruationibus quadrantem adhibui cuius radius pedem vnum cum di-

dimidio aequabat, quique Pariſiis ab artifice Chapotot confectus erat; hae autem obſeruationes ea circumſpectione inſtitutae ſunt, vt obſeruaretur altitudo ſolis momento ipſius tranſitus per meridianum, qui mihi innoteſcebat ope horologii oſcillatorii minuta ſecunda monſtrantis, quod quouis die, quantum quidem ſerenitas diei concedebat, ſecundum tempus verum dirigebatur. Praeterea omni ſtudio conabar proſequi ſolem vel ſtellas in meridiano, vsque dum certior factus eſſem per variationem altitudinis, quod meridianum iamiam praeteriiſſet. Tabulae Halleianae adhibitae a me fuerunt vt latitudines ex obſeruationibus deducerem, declinatione ſolis ſupputata illarum ſubſidio. Quod autem ad ceteras quibus in calculo Aſtronomico opus eſt tabulas attinet, ſcilicet diametri ſolis eiusque parralaxeos vt et refractionum, Caſſinianis vſus ſum. Tandem vt errorem inſtrumenti detegerem, quandoque notas ad horizontem ſtabiles vel appoſitas, quandoque inuerſionem quadrantis, et alia vice altitudines meridianas ſtellarum in plaga Septemtrionali vel Auſtrali obſeruatas adhibui; prout illius alteriusve verificationis operationem, ſerenitas aeris et commoditates locorum permiſerunt. Errorem ſic repertum in columna tertia indicaui, et ſi quae obſeruationem comitatae ſunt, circumſtantias adiunxi; vbi notandum quod ſi in ſingulis diebus idem error adſcriptus non reperiatur, id factum eſſe vt ſuperuacaneam euitarem repetitionem quam tamen vbique intellectam volui et ſi forte variauerit vbiuis no-

notaui. Nunc ad iter iuſſu IMPERATORIAE MAIESTATIS in me ſuſceptum peruenio; eius finis erat, vt non ſolummodo obſeruationes determinandis longitudinibus et lätitudinibus inſeruientes inſtituerem, quae neceſſariae erant vt mappae Geodeciſtarum earum ope emendari poſſent;) ſed etiam in Phyſicis quae notatu digna eſſent obſeruarem.

Reliqui ergo Petropolin die 9. Aprilis Anni 1727 ſtilo nouo et nouam Ladogam die 12 perueni; ſpatio tamen ſex dierum quo ibi commoratus fui non amplius quam duas obſeruationes latitudini inſeruientes inſtituere licuit. Hinc profectus ſum die Aprilis 19, et Cargapolium, vbi die 26. Aprilis adueneram, die 6. Maii reliqui. Omnes obſeruationes Latitudinum in his locis inſtitutas ſuo loco exponam. Tandem die 12 Maii in conſpectum Archangelopeleos veni, intrare tamen vrbem non niſi tribus diebus poſtea licuit, quoniam Duinae traiectus ob glaciei fruſta in ea copioſe fluctantia, admodum difficilis eſſe videbatur. Sequuntur obſervationes Archangelopoli inſtitutae, quas ante diem 15. Maii, incipere non licuit; en ſic ſe habent.

AR-

Maii 18 1727 Nov. ſt.	Alt. app. ſuper ⊙ Limbi			Altitudo Poli Determ.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 23″
	°	″	′	°	′	″	
18	45	15	50	64	34	5	bona
20	45	42	50	64	33	4	nubibus et vento obſtantibus ſatis bona.
24	46	30	30	65	33	19	bona per nubes
25	46	40	50	64	34	7	nubes et ⊙is limbus non recte apparens.
26	46	51	50	64	33	51	bona
27	47	2	30	64	33	34	accuratiſſima
29	47	21	50	64	33	55	bona
31	47	40	0	64	33	57	ſatis bona
Iun. 3	48	4	30	64	33	53	accurata
4	48	11	40	64	34	5	incerta per nubes
5	48	18	20	64	34	24	æſtimata per nubes
6	48	25	15	64	34	5	bona
7	48	31	20	64	34	14	paululum incerta
9	48	42	40	64	34	5	bona
11	48	53	20	64	33	0	incerta per nubes et ventum
13	49	0	30	64	33	49	accuratiſſima
16	49	9	40	64	33	33	incerta per nubes et ventum
17	49	11	0	64	34	24	accuratiſſima
20	49	14	40	64	34	42	bona.

 Cum

Cum etiam mihi in mandatis eſſet vt Colam me quam primum conferrem, primam nauem hanc locum petetentem conſcendi die 25. Iunii, die ſequenti ſolutis anchoris et naue adornata Colam tetendimus vsque dum 14. Iulii hanc in vrbem perueni. Ibi moratus ſum vsque ad initium anni ſequentis vt praeſcriptis obſeruationibus, infra cum illis quae in Inſula Kildung ſactae ſunt recenſendis vacarem. Tandem Archangelopolin profectus die 8. Ian. 1728 ibi adueni die 26 ope trahae qua vectus eram et die proxime ſequenti obſeruationes prout hic exhibentur continuaui.

Series Obſeruationum.

Archangelopoli obſeruatarum.

1728 Nov. St.		Alt. obſ. ſuper ☉ Limbi			Altitudo Poli Determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 45″
		°	′	″	°	′	″	
Ian.	29	7	48	30	64	34	17	bona
Febr.	2	8	53	50	64	34	38	bona
	20	14	43	20	64	34	16	bona
	21	15	4	45	64	34	16	ſatis bona
	23	15	49	15	64	33	11	incerta per nubes
	26	16	54	45	64	33	56	accurata
	29	17	59	30	64	36	37	incerta aere parum ſereno
Mart.	3	19	11	30	64	33	6	ſatis bona, ventus vehem.
	9	21	29	40	64	34	15	ſatis bona

bo-

1728 Nov. St.		Alt. obſ. ſuper ☉ Limbi.			Altitudo Poli Determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 45″
		°	′	″	°	′	″	
Mart.	10	21	53	20	64	34	2	bona
	11	22	16	45	64	34	5	inuitis nubib. ſatis bona
	13	23	4	0	64	33	57	bona
	15	23	51	0	64	34	11	bona
	17	24	37	20	64	35	11	dubia propter nubes
	23	27	0	0	64	34	20	ſatis bona
	24	27	23	40	64	34	16	bona
	27	28	33	30	64	34	53	dubia, ventus vehemens
	30	29	44	0	64	34	20	ſatis bona etſi nubes
	31	30	6	50	64	34	39	ſatis bona
Apr.	2	30	53	0	64	34	39	exacta
	6	32	24	0	64	34	49	exactiſſima
	7	32	47	30	64	33	50	ſatis bona
	8	33	9	40	64	34	3	bona
	9	33	31	45	54	35	15	ſatis bona
	10	33	53	40	64	34	30	accuratiſſima
	12	34	37	30	64	34	33	ſatis bona aerenubilo
	13	34	58	25	64	35	22	ſatis bene aere impuro
	14	35	21	20	64	34	2	accurata
	15	35	43	0	64	33	47	dubia, ventus vehemens

in-

1728 Nov. St.		Alt. obſ. ſuper ⊙ Limbi			Altitudo Poli determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 45″
		°	′	″	°	′	″	
Apr.	17	36	26	30	64	32	36	inter nub. æſtim.
	22	38	7	50	64	34	5	etſi nubes ſat bene
	24	38	47	20	64	34	18	ſatis bona
	25	39	7	0	64	34	11	accurata
	26	39	26	40	64	33	50	mediocr. bona
	29	40	22	45	64	34	24	bona inter nubes
	30	40	41	40	64	34	54	bona
Mai.	1	40	58	45	64	34	58	accurata
	2	41	17	0	64	34	39	accurata
	3	41	34	45	64	34	32	bona
	5	42	10	0	64	33	50	ſatis bene
	7	42	43	40	64	34	38	tantiſper dubia
	11	43	47	45	64	33	5	dubia inter nubes
	13	44	16	50	64	33	59	bona
	16	44	59	40	64	33	22	paulul. incerta nubes
	17	45	13	30	64	33	8	dubia } Err. Quadr. 4′ 20″ ſubtr.
	21	46	3	45	64	33	51	accurata }
	24	46	38	20	64	33	55	bona
	25	46	49	0	64	34	4	accurata
	28	47	19	15	64	33	38	ſatis bona
	29	47	28	45	64	34	1	bona
Iun.	6	48	30	0	64	34	1	accuratiſſima
	7	48	35	21	64	34	34	mediocriter bona
	10	48	51	40	64	33	33	dubia ⊙ non bene conſpicuo

du-

1728 Nov. St.	Alt. ſup. Limbi ☉			Altitudo Poli Determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 20″
	°	′	″	°	′	″	
11	48	55	0	64	34	31	dubia propter nubes et ventum
12	48	59	30	64	33	54	bona
13	49	3	15	64	33	37	bona
14	49	5	45	64	34	11	accurata
15	49	8	40	64	33	54	bona
17	49	10	50	64	34	2	bona
18	49	13	50	64	34	18	accurata
19	49	14	40	64	34	29	bona
20	49	15	20	64	34	24	bona
21	49	15	40	64	34	15	bona
22	49	15	20	64	34	21	bona
23	49	14	50	64	34	14	bona
24	49	13	45	64	34	15	bona
25	49	12	15	64	34	18	bona
26	49	10	40	64	34	0	ſatis bona, ventus vehemens
27	49	8	35	64	33	45	ſatis bona
Iul. 7	48	23	20	64	33	54	per nubes mediocriter bona.

Poſtquam iterum mihi initio Iulii mandatum erat, vt iterata vice Colam petens, iter per inſulam Kildunum obſeruandi cauſa facerem; Archangelopoli profectus die Iulii 21. in Kildunum veni 3. Auguſti; ibique per 5 ſeptimanas commoratus, Colam

lam profectus ſum, vbi 12. die eiusdem menſis veniens, ibi vsque ad initium menſis Martii 1729 permanſi, niſi quod circa finem manſionis meae tertia vice iter vnius menſis in Kildunum fecerim; quo peracto Colam reuerſus ſum, et cum abhinc iterum Archangelopolin traha vectus peterem, vt Latitudines locorum Kandalax, Coveda, Kieritte, Kiemi et Somma obſeruarem, aliquot dies ibi moratus ſum; iſta nempe loca iuxta viam, quae Cola Archangelopolin ducit, reperiuntur. Obſeruationes his in locis inſtitutas, ſuo loco adducam; quod autem ad illas quas Colae et in Kilduno feci attinet, coniunctim cum annis praecedentibus ibi habitis referam; nunc ſiſto continuationem obſeruationum mearum Archangelopoli factarum cum Cola ſecunda vice rediiſſem, vsque dum Petropolin peterem.

Series Obſeruationum

Archangelopoli habitarum

1729 Nov. St.		Alt. ſup. Limb. ☉.			Altitudo Poli Determin.			Obſeruationum Circumſtantiae ErrorQuadr. ſubtr. 4′ 30″
		°	′	″	°	′	″	
Apr.	15	35	37	30	64	33	21	ſatis bene
	17	36	20	0	64	33	49	ſatis bona vento vehem.
	19	37	1	40	64	33	53	bona
	20	37	22	20	64	33	49	ſatis bona, non bene conſpicuo ☉ diſco

bo-

1729 Nov. St.		Altit. Supl. Limbi ☉			Altitudo Poli Determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Err. Quadr. ſubtr. 4′ 30″
		°	′	″	°	′	″	
	22	38	3	15	64	33	32	bona, raras inter nubes
Mai.	23	38	22	40	64	34	8	accurata
	24	38	42	15	64	34	22	ſatis bona, ventus vehem.
	5	42	5	40	64	33	48	bona
	8	42	55	30	64	33	55	accuratiſſima
	9	43	11	0	64	33	34	bona
	10	43	26	45	64	34	36	bona
	11	43	42	20	64	34	31	bona
	15	44	42	0	64	33	55	ſatis bona
	19	45	36	15	64	33	37	bona
	20	45	48	0	64	34	31	ſatis bona
	24	46	35	20	64	34	24	bona
	27	47	7	15	64	34	10	bona
	28	47	17	0	64	34	14	ſatis bona, rarae nubes
Iun.	2	48	0	30	64	34	18	bona
	5	48	22	0	64	34	19	accurata
	13	49	2	15	64	33	59	ſatis bona
	15	49	8	0	64	34	9	bona
	18	49	13	40	64	34	19	bona
	20	49	15	20	64	34	27	bona
	23	49	15	20	64	34	5	ſatis bona, rarae nubes
	24	49	14	15	64	34	13	bona

1729 Nov. St.		Altit. Sup. Limbi ⊙			Altitudo Poli determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 30″
		°	′	″	°	′	″	
	27	49	9	0	64	34	7	accurata
	30	49	0	0	64	34	7	bona
Iul.	3	48	47	0	64	34	27	bona
	4	48	42	20	64	34	7	bona
	6	48	31	0	64	34	12	bona
	9	48	10	45	64	34	6	bona
	12	47	47	30	64	34	37	bona
	16	47	11	40	64	34	8	bona
	19	46	40	45	64	34	0	ſatis bona
	20	46	29	0	64	34	39	accurata
	22	46	6	45	64	34	46	bona
	25	45	29	0	64	34	11	ſatis bona
	26	45	15	30	64	34	36	ſatis bona
	28	44	49	15	64	33	40	accurata
	31	44	6	0	64	33	47	mediocr. bona, nub. transcurr.
Aug.	4	43	4	30	64	33	41	bona
	7	42	15	0	64	34	0	ſatis bona, vento obſtante
	8	41	57	45	64	34	18	bona
	11	41	5	45	64	33	58	ſatis bona
	13	40	29	30	64	34	5	bona
	18	38	54	45	64	34	27	bona
	22	37	35	45	64	34	9	bona
	26	36	13	30	64	34	7	mediocriter bona ventus

Alti-

Altitudines Meridianae
fixarum Archangelopoli obſeruatae
die Febr. 23 1728 Nouo Stilo.

Altitud. obſerv.			Altit. Poli detemin.			Nomina Stellarum Error Quadr. 4′ 40″ ſubtr.
°	′	″	°	′	″	
24	7	40	64	34	31	Med. in cing. Orion ad A.
31	37	30	64	33	6	Eius humer. praec. ad A.
32	53	0	64	32	31	Humerus ſequens ad A.
13	15	20	64	33	1	Lucida Lyrae ad Bor.
19	8	20	64	31	28	Ala Bor. Cygni ad B.

Altitudines Meridianae fixarum Archangelopoli
obſeruatae die 26 Febr. eiusdem Anni 1728.

Altitud. obſerv.			Altit. Poli determin.			Nomina Stellarum Error Quadr. 4′ 40″ ſubtr.
°	′	″	°	′	″	
13	14	40	64	32	21	Luc. Lyrae ad Bor.
24	7	45	64	34	26	Med. cing. Or. ad Auſtr.
31	37	40	64	32	56	Humer. prec. Or. ad Auſtr.
32	53	20	64	32	11	Humer. ſequens ad A.

Obſeruationes Colae inſtitutae

Die 14. Iulii 1727 in hanc vrbem veni poſtquam in itinere 3. fere ſeptimanas fuiſſem, quae ibi obſeruata fuere ſequentibus exhibeo.

1729 Nov. St.		Altit. Sup. Limb. ☉			Altitudo Poli determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 40″
		°	′	″	°	′	″	
Iul.	16	42	56	40	68	54	18	dub. ventus vehem.
	28	42	36	40	68	54	20	ſatis bona
Aug.	4	38	52	0	69	54	30	ſatis bona

1729 Nov. St.		Altit. ſuper Limbi ⊙			Altitudo Poli determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 40″
		°	′	″	°	′	″	
	5	38	36	0	68	54	21	ſatis bona
	6	38	20	0	68	54	15	bona, vent. vehem.
	7	38	3	20	68	54	24	bona
	8	37	46	40	68	54	16	bona
	9	37	29	20	68	54	32	bona
	10	37	13	0	68	53	33	mediocr. bona, ventus vehem.
	12	36	37	0	68	54	9	bona
	26	32	5	0	68	54	29	bona
	28	31	22	30	68	53	59	bona
Sept.	2	29	34	10	68	54	40	bona
	11	26	13	20	68	53	54	bona
	14	25	4	0	68	54	22	bona
	15	24	41	15	68	54	1	bona
	16	24	18	0	68	54	8	bona
	17	23	54	45	68	54	11	ſatis bona
	28	19	38	15	68	52	56	ſatis bona
Oct.	1	18	27	45	68	53	21	mediocr. bona
	12	14	14	0	68	53	56	accuratiſſima
	15	13	6	40	68	54	3	bona
	20	11	18	0	68	53	16	ſatis bona
	26	9	12	0	68	53	17	bona

Quoniam Archangelopolin me conferre animum induxeram, obſeruationes meae interruptae fuerunt; Siquidem nauem conſcendens per ſeptimanam

nam ventum ſecundum expectaui, cum autem perciperem iam intempeſtiuum eſſe ad nauigandum mare, et periculum iter facienti imminere, animum mutaui, et traha proficiſci decreui. Hinc intermiſſas huc vsque continuaui obſeruationes, quamdiu Sol in Horizonte Colae viſibilis eſſet: et cum ibi 12. Septembris Anni 1728 iterum veniſſem ſequentes inſtitui obſeruationes.

Series Obſeruationum Colae habitarum.

1728 Nov. St.		Altit. ſuper Limbi ⊙			Altitudo Poli determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 36″
		°	′	″	°	′	″	
Sept.	14	24	46	20	68	54	28	ſatis bona, vento obſtante
	15	24	23	15	68	54	25	nubes
	16	23	59	50	68	54	42	accurata
	17	23	36	40	68	54	34	etſi nubes bona — Error quadr. ſubtr. 4′ 20″
	20	22	26	45	68	54	33	accuratiſſima
	22	21	40	0	68	54	30	mediocr. bona, vent. veh. et nubes
	24	20	53	0	68	54	39	bona, vent. vehem.
	25	20	29	30	68	54	43	mediocr. bona, nubes et ventus
	29	18	56	45	68	53	51	ſatis bona, ⊙ diſco non recte conſpic.
Oct.	4	17	0	20	68	53	53	ſatis bona, nubes
	5	16	37	15	68	53	51	ſatis bona, ventus et nubes

 ac-

1728 Nov. St.	Altit. ſuper Limbi ☉			Altitudo Poli determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 4′ 20″
	°	′	″	°	′	″	
8	15	28	20	68	53	47	accurata
9	15	5	30	68	53	46	ſatis bona, ventus vehem.
12	13	57	30	68	53	52	bona
13	13	35	10	68	53	45	ſatis bona
15	12	50	40	68	53	45	mediocr. bona, nubes et vent. vehem.
17	12	6	40	68	53	42	ſat bene ☉ diſco non recte conſpic.
18	11	45	0	68	53	35	accurata
19	11	23	20	68	53	39	ſat bene, ☉ tamen fere conſpicuo
20	11	2	0	68	53	30	dubia, vento vehementiſſimo
22	10	19	30	68	53	35	idem
23	9	58	20	68	53	46	ſat bene, tametſi nubes
25	9	17	15	68	53	30	bona
26	8	56	0	68	54	22	mediocriter bona vent. vehementis.
27	8	37	0	68	53	12	accuratiſſima
30	7	38	0	68	53	3	etſi nubes, ſatis bona
Nov. 7	5	11	45	68	53	0	ſatis bona
11	4	6	0	68	52	40	ſat bene
1729							
Febr. 17	9	38	40	68	53	7	ſatis bona

An-

Antequam ſol his in terris Septemtrionalibus apparebat, iter in Inſulam Kiſdunum feci; Sed ex itinere redux, per tempeſtatem obſeruationes, (ſola praecedenti excepta, quae altitudinem ſolis meridianam exhibet,) inſtituere non licuit. Quas fixarum altitudines obſeruare hac in vrbe licuit, infra relatas videre eſt.

Altitudines fixarum Colae obſeruatae.

1728 N. St.	Altitudo obſerv. °	′	″	Altit. Poli determin. °	′	″	Denominatio fixarum Err. Quadr. ſubtr. 4′36″	
	11	30	15	68	54	0	Caſtor verſus	B
Oct.	7	44	45	68	53	57	Pollux	B
20	60	35	20	68	54	10	Pectus Cygni	A
	65	31	20	68	53	50	Eius cauda	A
	29	50	40	68	54	17	Os Pegaſi	A
	11	30	30	68	54	20	Caſtor	B
Oct.	29	22	45	68	53	58	Lucida Aquilae	B
31	60	35	30	68	54	0	Pectus Cygni	A
	65	30	40	68	54	30	Eius cauda	A
	60	35	40	68	53	50	Pectus Cygni	A
	65	30	45	68	54	25	Eius Cauda	A
Nov	14	30	30	68	53	33	Humer. preced. ♒	A
22	19	36	20	68	53	24	Humer. eius ſequens	A
	34	12	15	68	54	1	inf. ſeq. in □ Vrſ. mai.	B
	37	33	0	68	54	11	Boreal. earundem	B
	71	8	40	68	55	9	Polaris ſupra Polum	
Nov	55	21	30	68	53	35	Clara cing. Andr.	A
29	80	0	0	68	54	6	Genu Caſſiop.	A
	29	40	45	68	53	47	Vlt. caudae Vrſ. mai. Bor.	B

1728 N. St.	Altitudo obſeruata			Altit. Poli determin.			Denominatio fixarum Err. Quadr. ſubtr. 4′36″.
	′	′	″	°	′	″	
	37	33	30	68	54	42	Bor. ſeq. in □ Vrſ. mai. B
Dec.	76	14	30	68	53	27	pectus Caſſiop. Sched. A
10	71	7	30	68	53	59	Polaris ſupra Polum
	55	21	15	68	53	50	Clara cing. Andr. A
	71	7	15	68	53	44	Polaris ſupra Polum
	56	51	0	68	54	34	infra Polum
Dec.				68	54	39	per duas altit. Polaris
15	76	14	0	68	53	57	Schedir Caſſiop. ſupra Polum
	34	3	20	68	54	10	infra Polum
				68	54	3	per vtramq. alt. Schedir
	79	44	40	68	53	1	Bor. ſeq. □ Vrſ. mai. ad B
	34	28	0	68	54	13	Cor ♌ Regulus A
	42	22	45	68	54	45	Lucida colli ♌ A
Dec.	43	11	50	68	53	49	Luc. lumborum A
27	37	16	20	68	54	19	Cauda Leonis A
	36	39	46	68	54	13	Luc. Cath. Caſſiop. B
	34	3	30	68	54	19	Schedir eius pector. B

In inſulam Kildunum veni prima vice die 30. Nouembris 1727, eamque reliqui die 10. Decembris. En ibi inſtitutas obſeruationes.

Fixarum altitudines meridianae Kilduni obſeruatae.

1727 N. St.	Altitudo obſeruata			Altit. Poli determin.			Fixarum Denominatio Err. Quadr. ſubtr. 2′10″
	′	″	″	°	′	″	
	36	36	30	69	22	38	Aldebaram ad A
Dec.	49	1	30	69	22	17	Cornu Bor ♌ A
2	66	24	0	69	20	2	Capella A
	18	0	40	69	22	0	Lucida Lyrae ad B

Secun-

Secunda vice Kildunum viſitaui die 3. Auguſti 1728, et eo relicto, Colam me contuli die 6. Septembris; interim ſequentes Solis altitudines ibi obſeruaui, ſicuti infra referuntur.

Obſeruationes Solis in Kilduno

1728 N. St.	Altit. ſuper ☉ Limbi °	′	″	Altit. Poli determin. °	′	″	Obſerv. Circumſt. Err. Quadr. ſubtr. 5′ 16″
Aug.							
6	37	40	40	69	21	49	bona
7	37	23	15	69	22	27	ſatis bona
11	36	14	20	69	21	50	accurata
12	35	56	20	69	21	49	bona
14	35	20	0	69	21	26	accurata
17	34	22	0	69	22	38	accuratiſſima
20	33	24	0	69	21	56	accuratiſſima
23	32	23	45	69	21	42	bona
29	30	18	0	69	21	46	bona
30	29	56	20	69	21	55	bona
31	29	34	30	69	22	6	accurata
Sep. 1	29	12	45	60	22	3	accuratiſſima
3	28	29	30	69	21	23	ſatis bona, ventus vehemens
4	28	7	0	69	21	43	accurata

Die 20. Ianuarii 1729 iterum Kildunum petii, et inde profectus die 6. Februarii, hoc temporis ſpatio ſequentes ibi inſtitui obſeruationes.

Altitudo Meridiana Inferioris Limbi ☉

1729 Nov. St.		Alt. obſ. infer ☉ Limbi			Altitudo Poli Determin.			Obſeruationum Circumſtantiae Error Quadr. ſubtr. 5′ 10″
		°	′	″	°	′	″	
Ian.	30	3	6	40	69	21	39	bona

Altitudines Meridianae Fixarum.

	Altitudo obſeruata			Altit. Poli determin.			Denominatio fixarum Err. Quadr. ſubtr. 5′10″	
Ian.	25	6	40	69	17	53	Capella verſus	B
26	30	8	0	69	20	28	Vltima caudae Vrſ. M.	B
27	36	43	0	69	19	18	Aldebaram	A
28	34	28	20	69	17	37	Schedir Caſp.	A
	18	1	20	69	19	36	Lyrae lucida	B
	26	40	0	69	21	13	Procyon	A
	49	6	30	69	20	21	Cornu Bor. ♉	A
	19	22	40	69	20	26	Med. Cinguli Orion.	A
	28	5	40	69	20	47	Orion. hum. ſequens	A
30	43	22	45	69	20	35	Calx in pede priore preced. ♊	A
	36	42	30	69	19	48	Aldebaram	A
	34	28	45	69	19	2	Caſſiopeae Schedir	B
	38	41	30	69	20	9	Ad eius coxas	B
	38	15	46	69	19	59	Genu Caſſiopeae	B
	13	38	40	69	19	38	Lucida cing. Andr.	B
31	19	21	15	69	20	4	Caput Meduſae	B
	25	19	0	69	18	39	Lucida lat. Perſei	B
	41	23	45	69	20	27	Arcturus	A
	45	46	20	69	19	47	In cap. ♌ Auſtral.	A
	34	3	15	69	19	34	Cor ♌ Regulus	A
	42	46	30	69	19	30	Lucida Lumborum	A

Lucida

1728 Nov. St.	Altitudo oberuata Limbi.	Altitudo Poli Determin.	Denominatio Fixarum ErrorQuadr. ſubtr. 5′ 50″
	° ′ ″	° ′ ″	
Dec. 31	41 58 30	69 19 32	Lucida colli ♌ A
	36 51 30	69 19 44	Cauda ♌ A

Cola relicta 1 Martii 1729, in itinere quo Archangelopolin petebam, ſummo mane in locum, cui nomen Candalax, perueni die 5. eiusdem menſis, et eum reliqui die 7. veſpere; interim ibi obſeruatae fuere

Solis Altitudines Meridianae

1729 Nov. St.	Alt. ſup. Limb. ☉.	Altitudo Poli Determin.	Obſeruationum Circumſtantiae ErrorQuadr. ſubtr. 4′ 30″
	° ′ ″	° ′ ″	
Mart. 5	17 16 15	67 9 58	accurata
6	17 38 45	67 10 37	accurata
7	18 0 40	67 11 56	dubia

Fixarum Altitudines Meridianae.

1726 N. St.	Altitudo obſeruata	Altit. Poli determin.	Denominatio fixarum Err. Quadr. ſubtr. 5′ 0″
	′ ′ ″	° ′ ″	
	28 50 45	67 10 7	Procyon verſus A
Mart	15 28 30	67 9 53	Cor Hydrae A
6	47 56 15	67 9 35	In Cap. ♌ Auſtral. A
	36 12 30	67 9 59	Regulus A
	15 43 0	67 10 18	Pectus Cygni B
	21 37 30	67 10 2	Eius cauda B

Die 8. Martii Kouedam veni indeque 11. eiusdem menſis mane profectus ſum. Habes hic obſervationes ibi inſtitutas.

1729 N. St.	Altit. Mer. obſerv.			Alt. Poli Determin.			Err. Quadr. ſubtr. 4′ 37″
	°	′	″	°	′	″	
Mart.	19	15	45	66	43	8	Limbus ſuperior ☉
9	52	1	20	66	43	7	Pollux ad Auſtrum
	15	54	45	66	43	10	Cor Hydrae verſus Auſtrum

Die 12. Martii mane Kierittam veni ibique trium dierum ſpatio quae ſequuntur obſeruaui.

Altitudines Meridianae Kierittae obſeruatae.

1729 N. St.	Altitudo obſerv.			Altit. Poli determin.			Err. Quadr. ſubtr. 4′ 52″
Mart. 12	°	′	″	°	′	″	
12	20	51	40	66	17	51	Limbus ſuper ☉ accur.
13	21	14	0	66	19	4	ipſe ſed aere impuro, incerte
	56	14	40	66	17	45	Caſtor } ad A
	52	26	40	66	18	1	Pollux } ad A
	16	20	20	66	17	45	Cor Hydrae } ad A
	14	59	45	66	17	42	Luc. Lyrae } ad B
	20	45	20	66	17	54	Cauda Cygni } ad B

Itèr me die 20. Martis in locum qui Kiemi vocatur, perduxit; hunc 22. veſpere reliqui; cetera ibi obſeruata hic exhibeo.

Altitudines Meridianae Kiemi obſeruatae.

Err.

1729 N. St.	Altitudo obſerv.	Altit. Poli determin.	Err. Quadr. ſubtr. 4′58″
	° ′ ″	° ′ ″	
Mart.	25 43 30	64 58 32	Limbus ſuper. ⊙ bene
21	26 7 30	64 58 9	Limb. ⊙ ſuper. ſat bene
22	17 39 40	64 58 13	Cor Hydrae ad A
	19 26 0	64 58 17	Cauda Cygni ad B

Sommam die 23. Martii veni, et inde profectus die 28. ſpatio quinque dierum ſequentia obſervaui.

Altitudines Meridianae Sommae obſeruatae

1727 N. St.	Altitudo obſeruata	Altit. Poli determin.	Err. Quadr. ſubtr. 5′10″
	′ ″ ″	° ′ ″	
Mart.	27 37 17	64 15 44	Limb. ſuper ⊙ accurat.
24	18 22 0	64 15 58	Cor Hydrae ad Auſtr.
	50 50 0	64 15 54	In capite ♌ Auſtr. ad A
	39 6 20	64 16 10	Regulus verſus Auſtr.
	13 49 40	64 16 4	Pectus Cygni } ad Bo-
	18 44 0	64 15 56	eius Cauda } ream

Petropolin redire, et in inſtanti itinere, quas poſſem obſeruationes facere iuſſus, Archangelopoli profectus ſum die 29. Auguſti 1729 ſummo mane; et itinere die nocteque continuato tandem in locum qui Colmogorod appellatur perueni; ibique vnicam, quae ſequitur, altitudinem Solis, in obtinenda huiusce loci latitudine, obſeruare potui.

1729 N. St.	Altit. ſuper Limbi ⊙	Latitudo determin.	Loci Colmogorod Err. Quadr. ſubtr. 4′17″
Aug.	° ′ ″	° ′ ″	
30	35 7 45	64 14 43	

Die ſeptimo Septembris vicum nomine Craſnebore intraui ; Conabar ibi obſeruare , ſed caelum nubilum irritos fecit conatus ; hinc poſtquam ibi diem vnam noctemque permanſiſſem , nec caelum ſerenum tam cito expectandum videbatur, profectus ſum, iuſtus enim a glacie imminenti metus aderat, ne proficiſcentem in itinere interciperet ; et poſt 3 dierum ſpatium veſperi in locum Ouſtiouga veni, quem die 23. eiusdem menſis tandem reliqui , ceterum plures ſequentibus obſeruationibus , ibi inſtituere non licuit

Solis Altitudines Meridianae.

1727 N. St.	Alt. ſuper Limbi ☉			Latitudo Determ.			Loci Oſtioug Err. Quadr. ſubtr. 4′ 20″
	°	″	′	°	′	″	
Sept.							
15	32	37	0	60	45	56	bene
16	32	13	45	60	45	59	accurate
19	31	4	0	60	43	55	accurate
20	30	40	45	60	45	47	ſatis bene

Stellarum Altitudines Meridianae.

1728 N. St.	Altitudo obſeruata			Latitudo determin.			Loci Ouſtrioug Err. Quadr. ſubtr. 4′ 20″	
	°	′	″	°	′	″		
Sept.	22	36	40	60	46	13	Hum. prec. ♒ ad	A
17	56	54	0	60	46	25	Caput Androm.	A
	73	39	0	60	45	44	Cauda Cygni	A
	37	30	15	60	45	52	Lucida Aquilae	A
	3	31	30	60	45	49	Caſtor ad Boream	
	34	4	30	60	46	11	Bor. praec. in □ Vrſae Mai.	B

No-

Nouam Totmam intraui die 1. Octobris, et inde profectus die 8. per hanc ſeptimanam ſequentibus operam dedi.

Altitudines Solis Totmae.

1729 N. St.	Alt. obſ. ſuper ⊙ Limbi			Latitudo determin.			Err. Quadr. 4′ 20″ ſubtr.
	°	′	″	°	′	″	
Oct. 2	26	38	0	60	7	30	Limb. ⊙ ſuper. bene
4	25	51	20	60	7	39	exacte
5	25	28	20	60	7	33	ſatis bene

Ibi etiam aliquas. quae ſequuntur, altitudines meridianas fixarum obſeruaui.

Altitudines Meridianae fixarum Totmae verſus Auſtrum obſeruatae.

1729 N. St.	Altitudo obſeruata			Latitudo determin.			Err. Quadr. 4′ 20″ ſubtr.
	°	′	″	°	′	″	
Oct. 7	36	2	15	60	8	0	humer. preced. Orionis
	28	33	40	60	7	27	media in Cingulo
	37	17	0	60	8	5	humerus ſequens
	13	38	45	60	8	29	Sirius

Die 11. Octobris Vologdam veni, quam 9. Decembris veſpere reliqui; Interim duorum menſium ſpatio, nec vnica nox obſeruationi propitia fuit, ita vt ſolummodo altitudines ſuperioris limbi Solis capere potuerim quas nunc ordine ſiſto.

Altitudines Meridianae ſuperioris Limbi Solis Vologdae.

Err.

1729 N. St.	Altitudo obſeruata			Latitudo determin.			Err. Quadr. 4′ 10″ ſubtr.
	°	′	″	°	′	″	
Oct. 12.	23	35	30	59	19	42	bona
18	21	21	40	59	20	6	ſatis bona
29	17	31	15	59	20	14	accurata
30	17	12	0	59	19	45	bona
Nov. 4	15	37	0	59	19	23	bona
11	13	34	20	59	19	37	bona
12	13	18	15	59	19	18	
15	12	31	20	59	19	5	bona, vento obſtante
16	12	16	20	59	19	1	
22	10	53	20	59	19	3	ſatis bene
24	10	28	15	59	19	14	bona obſerv.

Petropoli Archangelopolin iter faciens Cargapolium prima vice veni die 26. Aprilis anni 1727 et inde profectus die 6. Maii; decem horum dierum interuallo obſeruaui quae ſequuntur

1727 Nov. St.		Alt. ſuper. Limbi ☉			Latitudo determin.			Cargapolii Err. Quadr. ſubtr. 1′ 45″
		°	′	″	°	′	″	
Apr.	29	43	11	0	61	28	58	ſatis bene
	30	43	29	0	61	29	32	accurate
Mai.	1	43	47	40	61	29	3	accuratiſſime
	2	44	6	15	61	28	47	bene
	3	44	23	50	61	29	2	bene
	4	44	41	20	61	29	8	accurate

Ex itinere redux ſecunda vice vrbem hanc intraui die 14. Septembris 1729, ex ea diſcedens die

29

29. Ianuarii 1730; exhibeo tibi obſeruationes ſpatio vnius menſis et dimidii fere inſtitutas.

Solis Altitudines Meridianae

1730 Nov. St.	Limbus ſuper ☉			Latitudo determin.			Cargapolii Err. Quadr. 5′ 20″ add.
	°	′	″	°	′	″	
Ian. 19	8	27	0	61	28	39	bonaobſeruatio
30	11.	6	30	61	28	33	accurata
31	11	22	30	61	29	5	bona

Fixarum Altitudines Meridianae

1729 Nov. St.	Altitudo obſeruata			Latitudo determin.			Err. Quadr. 5′ 20″ add.	
	°	′	″	°	′	″		
Dec.	57	5	15	61	29	4	Pollux ad	A.
26	20	58	0	61	28	56	CorHydrae ad	A.
	10	2	30	61	28	42	Luc. Lyrae ad	B.

CumPetropoli relicta Archangelopelin peterem nouamLadogam a S. Nicolao denominatam intraui die 12. Aprilis 1727, eamque reliqui die 19. veſpertino tempore; in hoc loco non niſi duabus vicibus obſeruare licuit; redux autem ex itinere die 7. Febr. 1730 rurſus adueni in eundem locum, vbi permanſi vsque ad 15. eiusdem menſis, hoc autem 8 dierum ſpatio, vnicam tantum obſeruationem facere licuit; en adſunt tres meae obſeruationes ibi inſtitutae.

Altitudines Meridianae ſuperioris Limbi Solis in Noua Ladoga obſeruatae.

1729 N. St.	Altitudo obſeruata			Latitudo determin.			Err. Quadr. 1′ 30″ add.
	°	′	″	°	′	″	
Apr. 13	39	6	45	60	4	30	dubia propter nubes
18	40	51	40	60	6	29	bona
1730							
Feb. 13	16	46	0	60	6	31	Err. Quadr. 5′ 0″ add.

Quod ſupereſt ex hactenus recenſitis obſeruationibus, media quaedam erunt capienda, quae inſervient Latitudinibus locorum per quos iter feci determinandis, quod feci, ſicuti ſequens tabula exhibet.

Tabula Latitudinum

Omnium Locorum, in quibus in itinere meo obſeruationes inſtitutae ſunt.

	°	′		°	′
Archangelopolis	64	34	Somma	64	16
Cola	68	54	Colmogorod	64	15
Kilánum	69	22	Oſtiouga	60	46
Candalax	67	10	Noua Totma	60	9
Koveda	66	43	Vologda	59	20
Kieritte	66	18	Cargapolium	61	29
Kiemi	64	58	Noua Ladoga	60	7

Errata.

Errata.

Pap. 8. Lin. 11. loco BAC lege BAB, ibique ad §. 15 ſupple in margine fig. 4.

Pag. 64. Lin. 1. pro $\frac{\text{ſin ang. BCd}}{}$ lege $\frac{\text{ſin ang. BCS.}}{}$

- - Lin. 2. pro *Ao*. Lege *AB*.

- - Lin. 11. pro BQ. lege Ba.

- - Lin. 14. pro C*a*. Lege 2 C*a*.

Pag. 65. Lin. 19. pro CR*dx* lege CR*ddx*.

- - Lin. 20. pro $\frac{e}{c}$ lege $\frac{dc}{c}$

Pag. 68. Lin. 9. pro *xp* lege *xP*.

Pag. 114. Lin. 4. pro I et H, lege I et K.

Pag. 162 Lin. 20. pro vt datum ſitum mutuare, lege, vt datum ſitum mutare.

Pag. 200. Lin. 19. tanto ſit ſtructurae ſimplicitas, lege, tanta ſit ſtructurae ſimplicitas.

Pag. 209. apponatur in margine ad §. 51. fig. 5 et 4.

Pag. 212. Lin. 26. pro $a = 59\frac{4}{17}$ lege $a = 59\frac{5}{17}$ et in eadem Linea pro $c = 91\frac{8}{9}$ lege $c = 91\frac{7}{11}$.

- - Lin. 27. pro $= 32\frac{1}{2}$ lege $32\frac{1}{3}$.

Pag. 244. Lin. 8. in Margine pro fig. 9 lege fig. 6.

Pag. 369. Lin. 4. pro in Scythicis quoque lignis fuit. lege, in Scythicis quoque linguis fuit.

Pag. 383. Lin. 1. pro patraſſent. Mutavit, lege, patraſſent, mutavit.

Pag. 388. Lin. 15. pro Gaetae, lege Getae.

Pag.

Pag. 389. Lin. 20. pro vt numeros, lege vt numos.

Pap. 390. Lin. 1. pro transiiciunt, lege tranſiiciebant.

- - Lin. 2. pro contineantur, lege continerentur.

Pag. 417. Lin. 16. pro litterraum, lege litterarum.

Pag. 418. Lin. 2. pro inducant, lege inducunt.

Pap. 433. lin. 8. pro Marti lege Martii..

Pag. 438. Lin. 11. pro quae, lege quas.

P. 440. Lin. 5. pro Geodeciſtarum lege Geodeſiſtarum.

- Lin. 17. pro Archangelopeleos lege Archangelopoleos.

Pag. 443. Lin. 18. pro $54^{\circ}\ 35'\ 15''$ lege $64^{\circ}\ 35'\ 15''$.

Pap. 446. Lin. 9. pro quae Cola, lege quae a Cola.

Pag. 458. Lin. 21. pro die 20. Martis, lege die 20. Martii.

Pag. 460. Lin. 16. pro $60^{\circ}\ 43'\ 55''$ lege $60^{\circ}\ 45'\ 55''$.

Fig: 2.

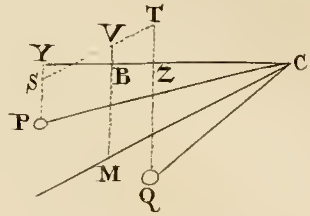


Fig: 4.

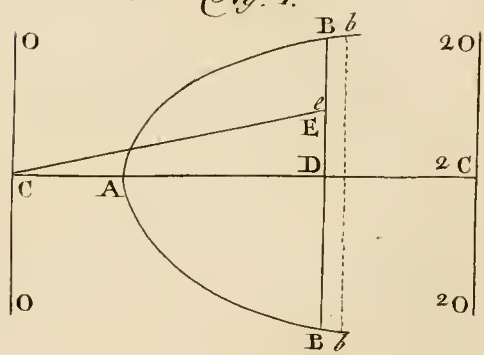


Fig: 6.

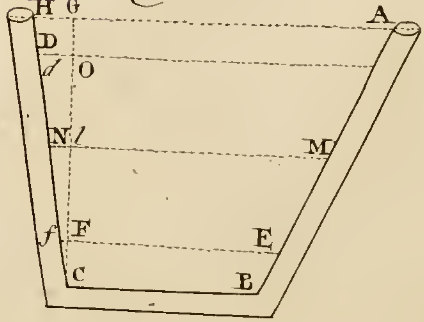


Fig. 1.

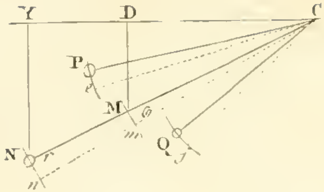


Fig. 2.

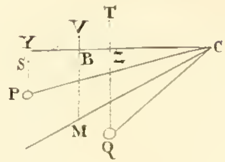


Fig. 3.

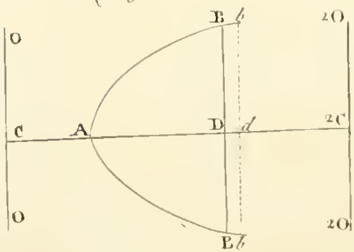


Fig. 4.

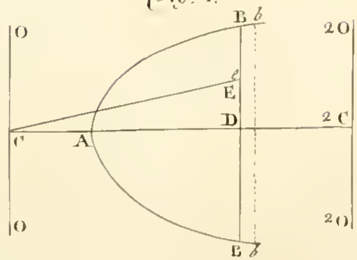


Fig. 5.

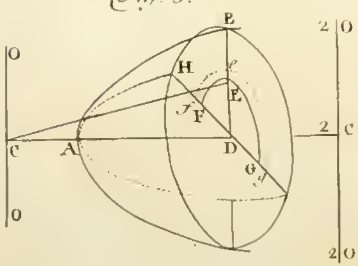
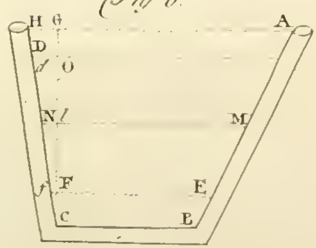


Fig. 6.



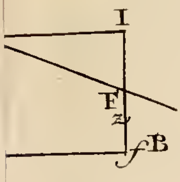


Fig: 2.

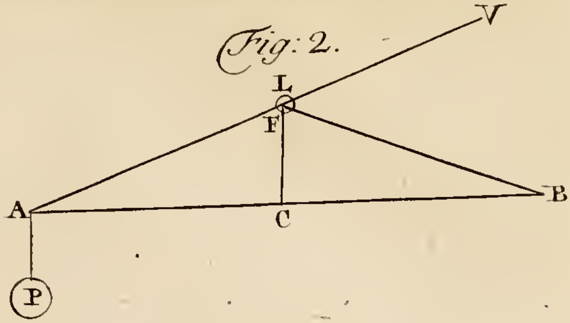
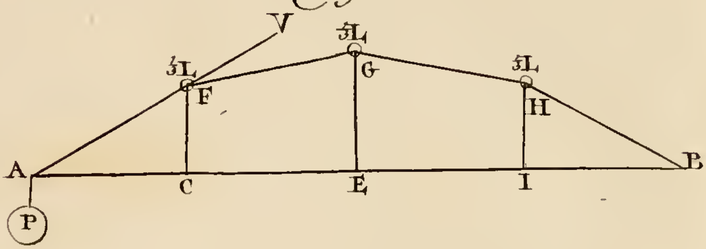




Fig: 4.



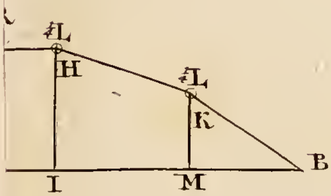
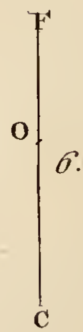


Fig: 6.



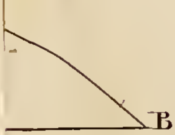


Fig: 8.

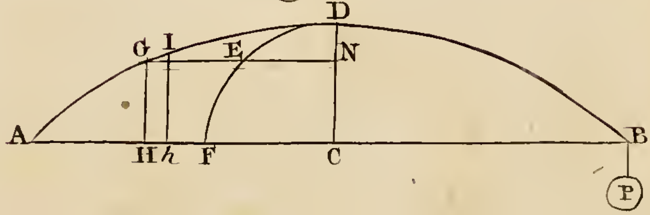


Fig. 1.

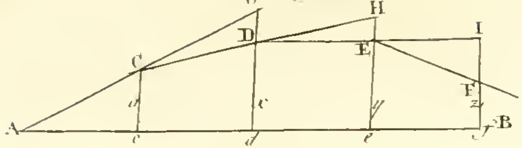


Fig. 2.

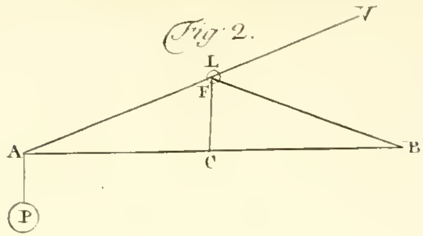


Fig. 3.

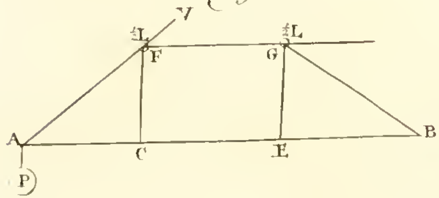


Fig. 4.

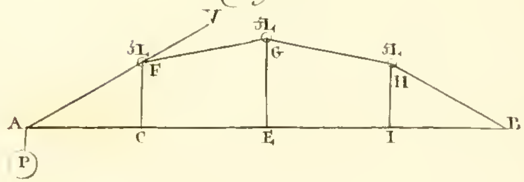


Fig. 5.

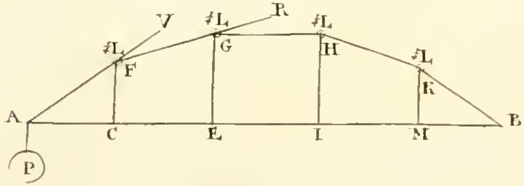


Fig. 6.

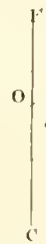


Fig. 7.

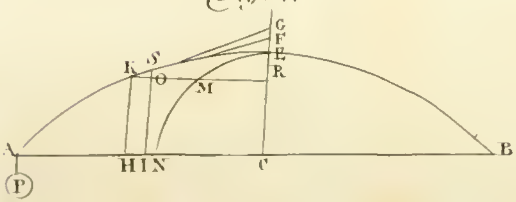
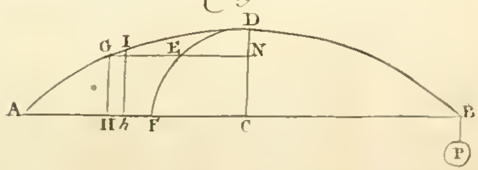
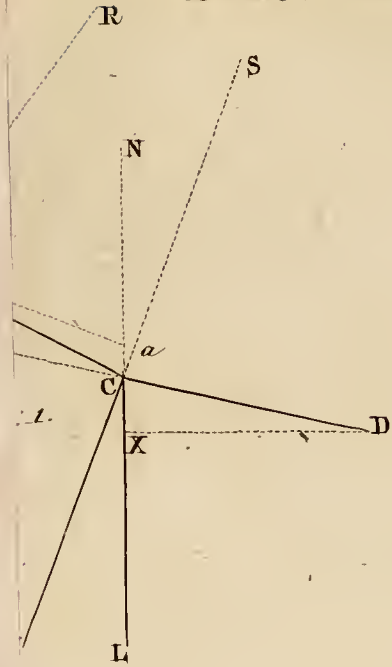
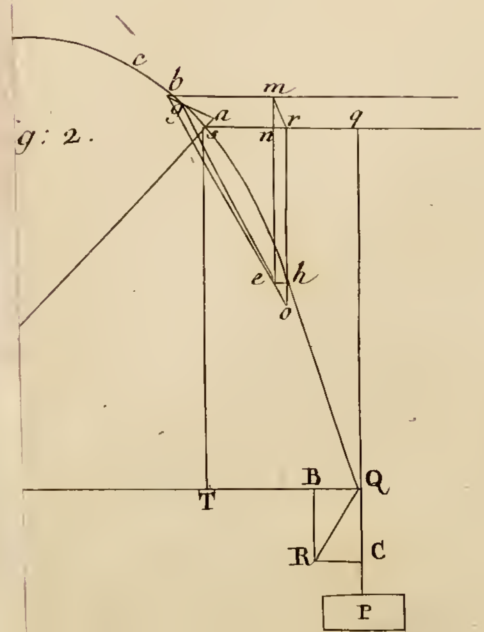


Fig. 8.





:1.



g: 2.

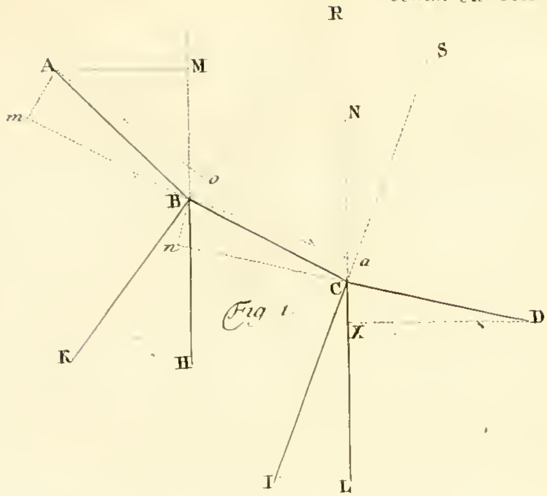


Fig. 1.

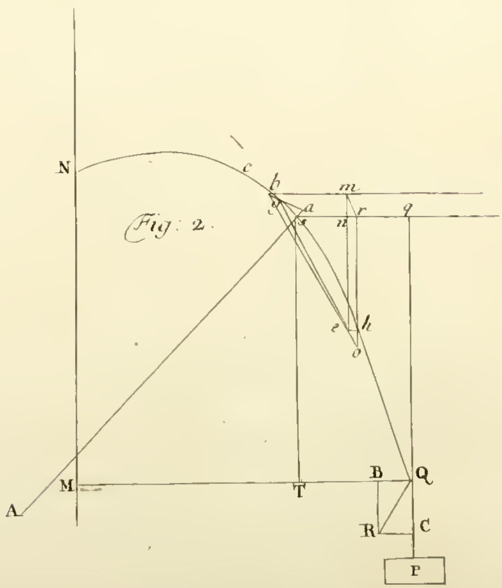


Fig. 2.

Comm: Ac: Scient: Petr: Tom: III: Tab: IV. p. 70-100.

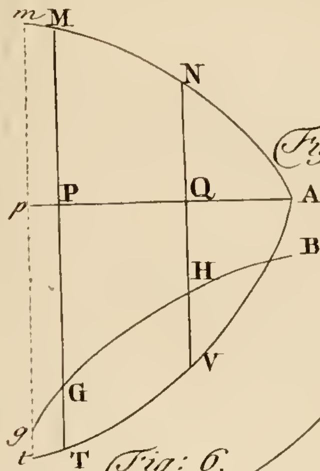
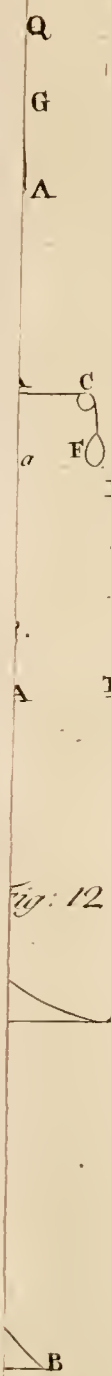


Fig: 3.



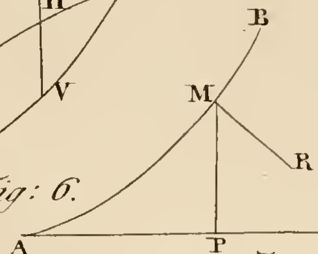


Fig: 6.

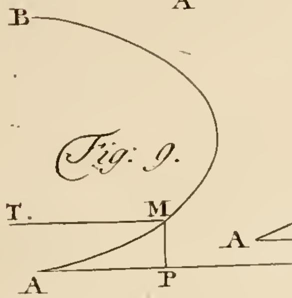


Fig: 9.

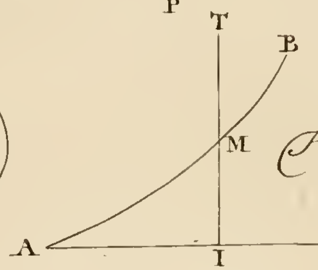


Fig: 10.

[F]ig: 12.

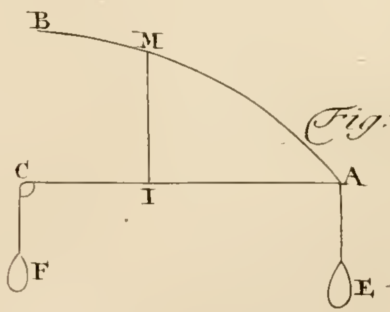


Fig: 13.

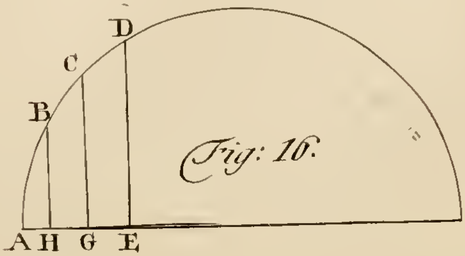
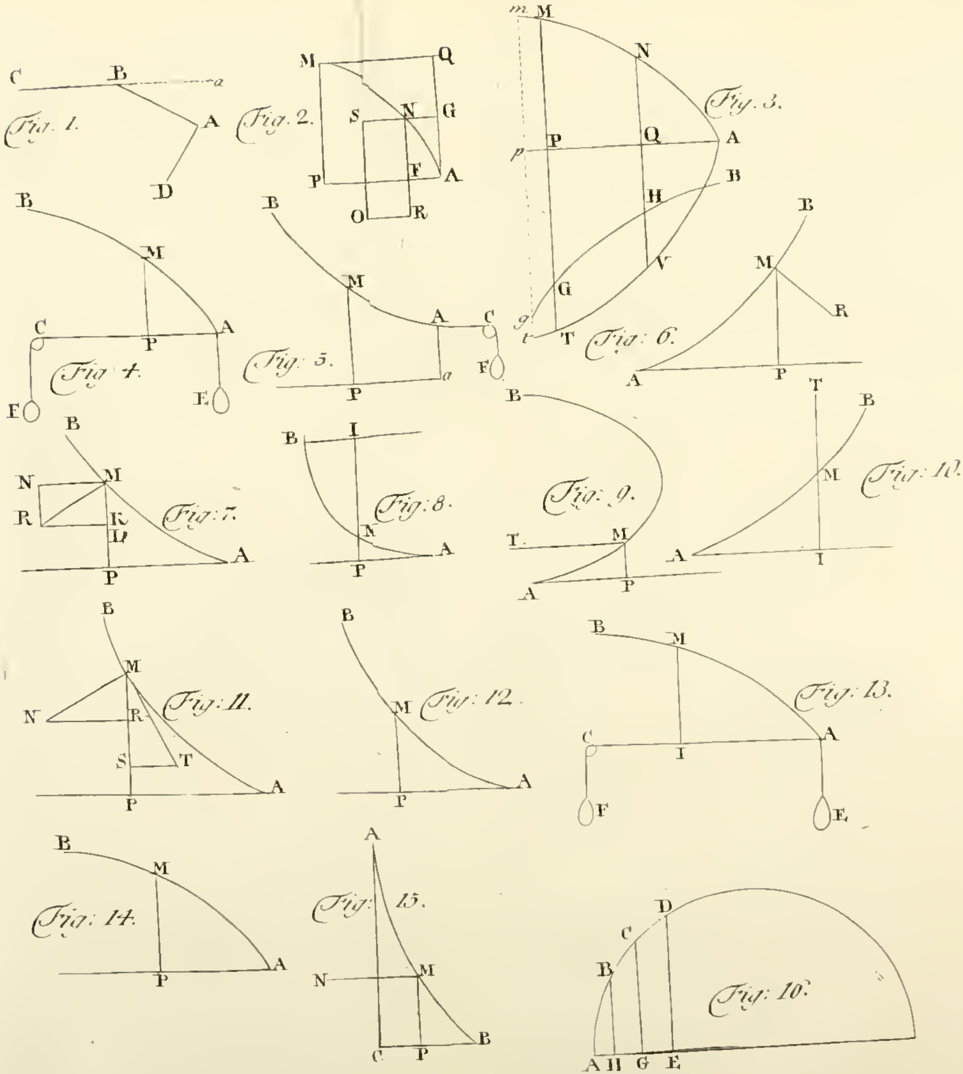
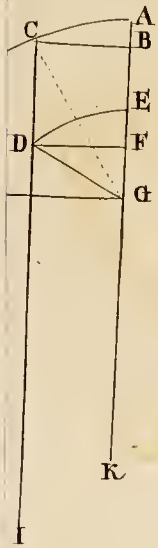


Fig: 16.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 10.



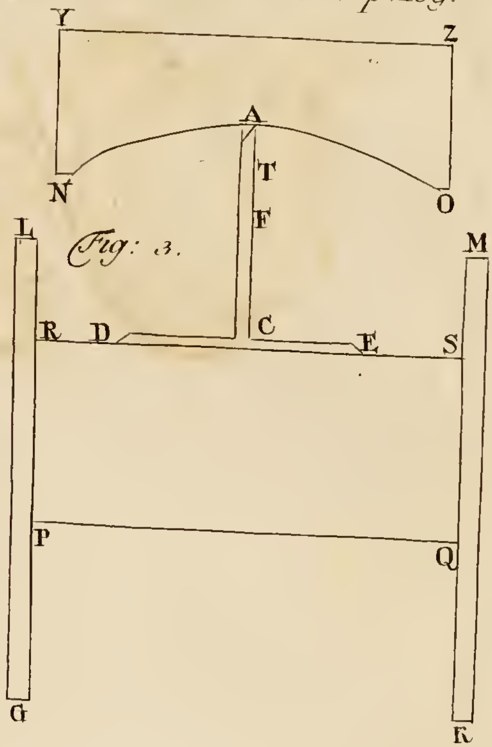
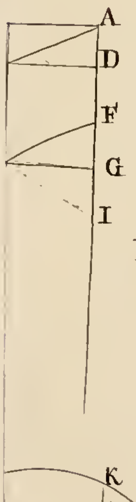


Fig: 3.



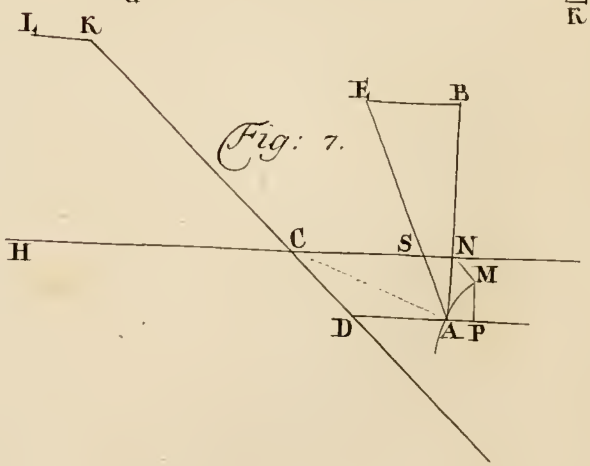


Fig: 7.

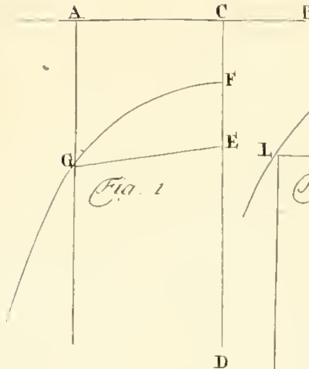


Fig. 1.

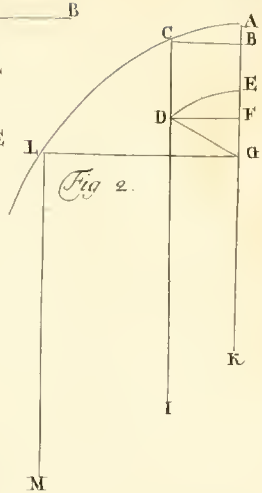


Fig. 2.

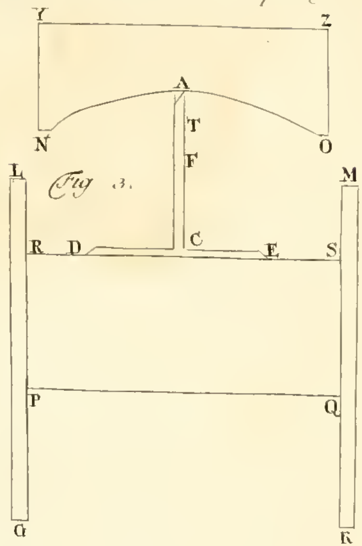


Fig. 3.

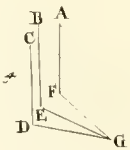


Fig. 4.

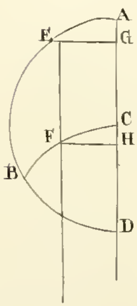


Fig. 5.

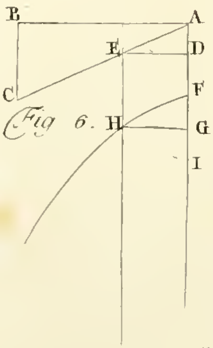


Fig. 6.

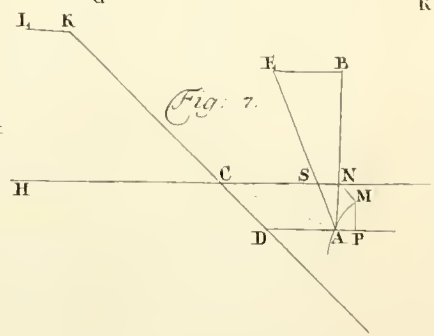


Fig. 7.

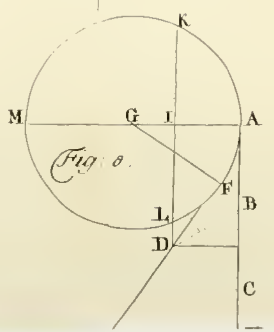


Fig. 8.

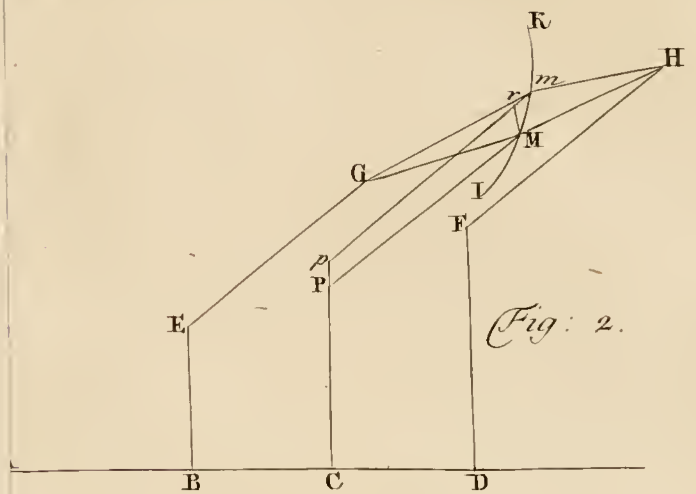
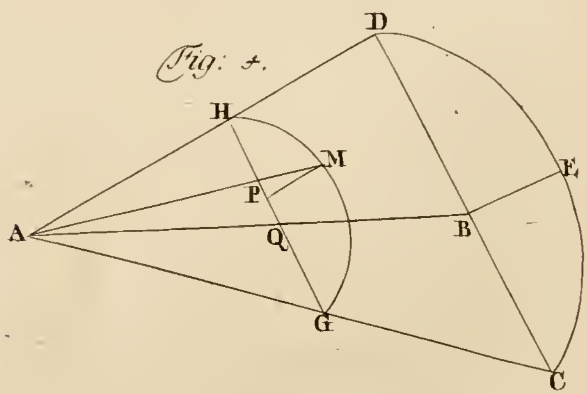


Fig: 2.

Fig: 4.



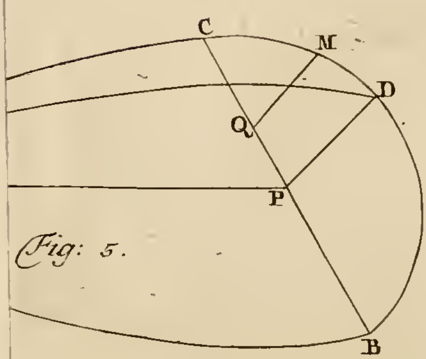


Fig: 5.

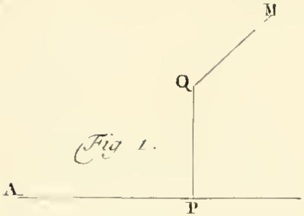


Fig. 1.

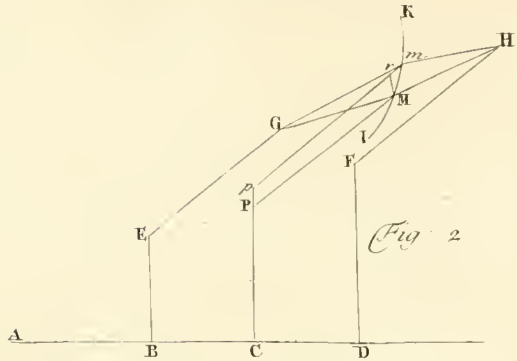


Fig. 2

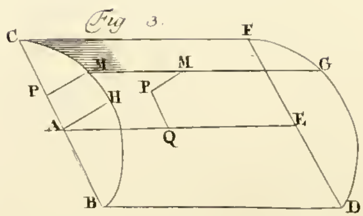


Fig. 3.

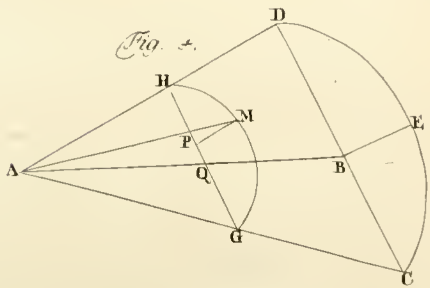


Fig. 4.

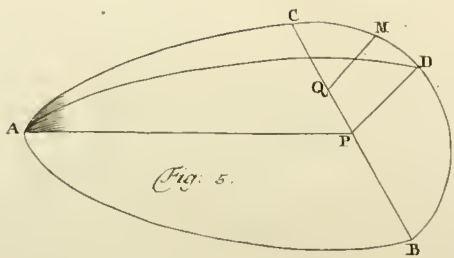
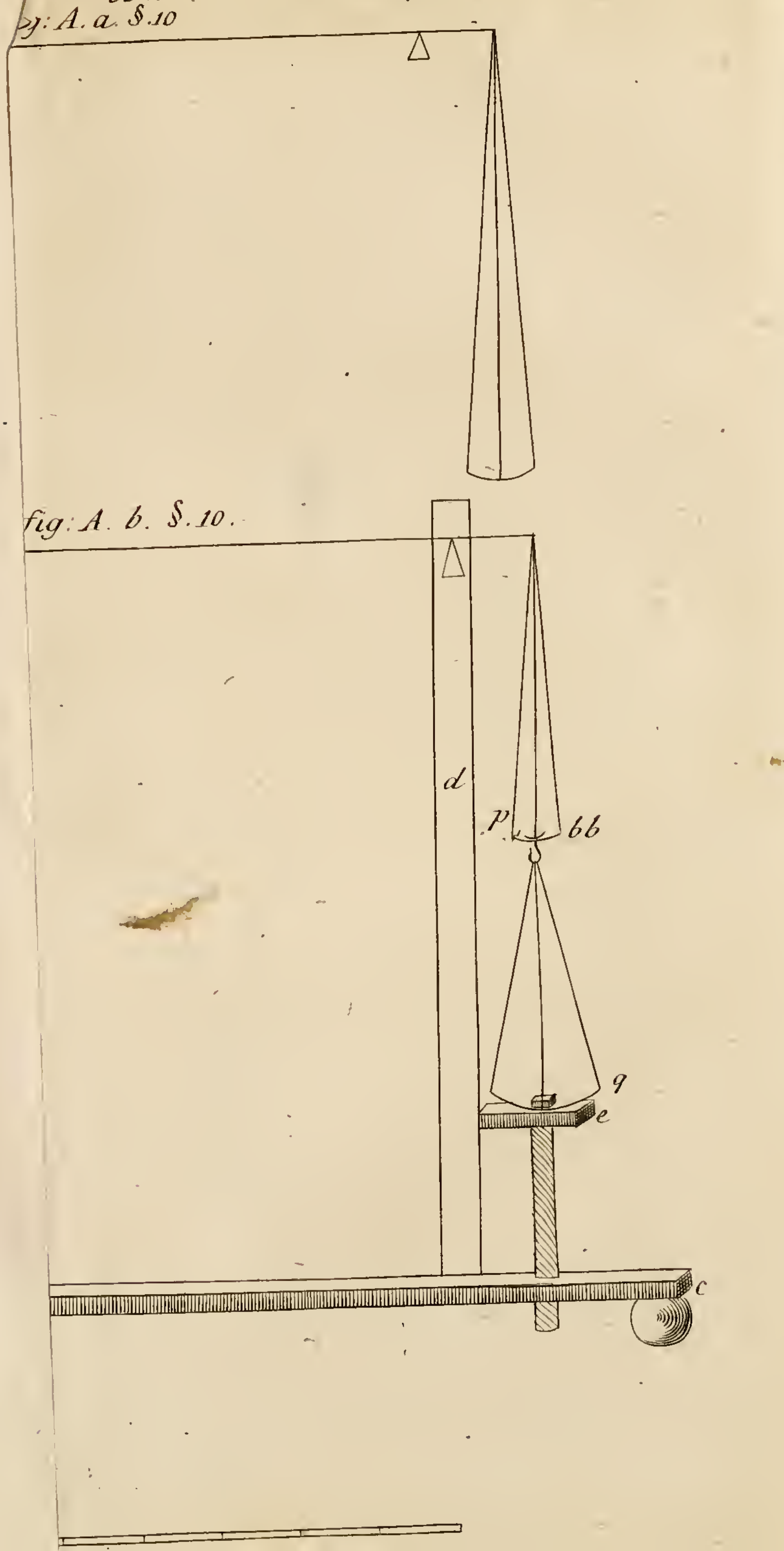


Fig: 5.



A. a. §. 10
fig: A. b. §. 10.
d
p
bb
q
e
c

Fig A. a § 10

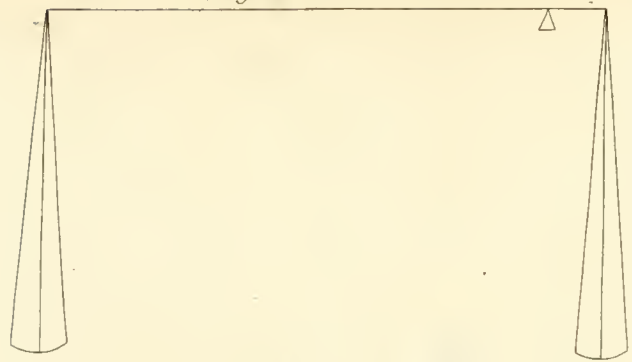
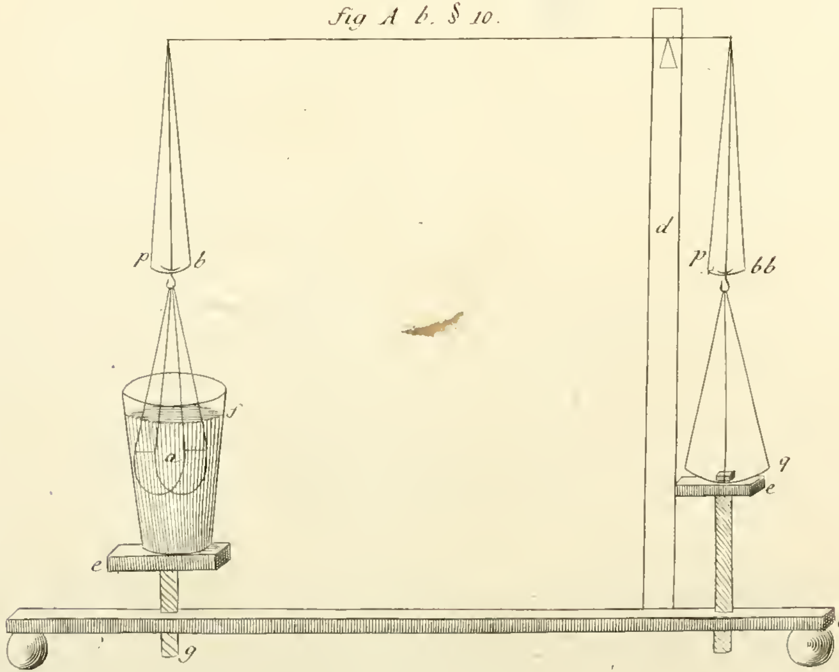
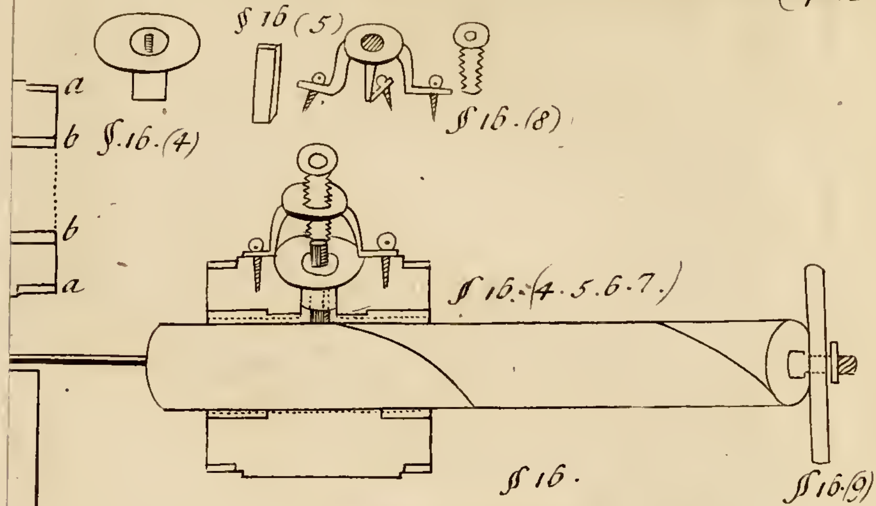


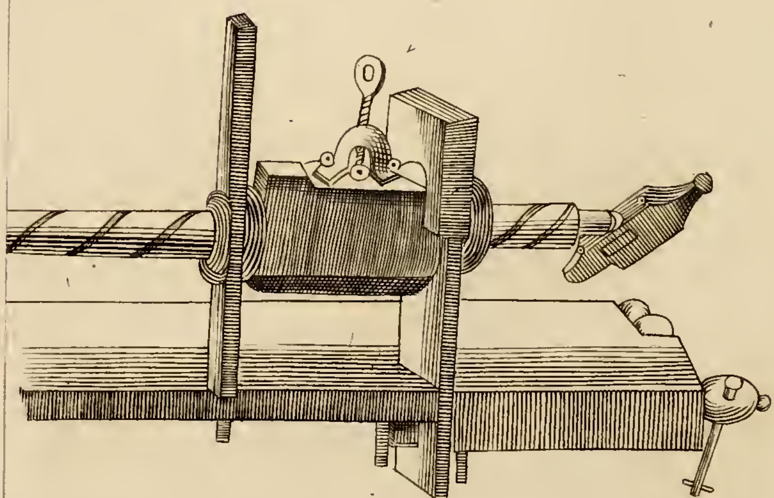
Fig A b. § 10.



Comm: Ac: Sc: Petr: Tom: III. Tab. VIII. (3. p163

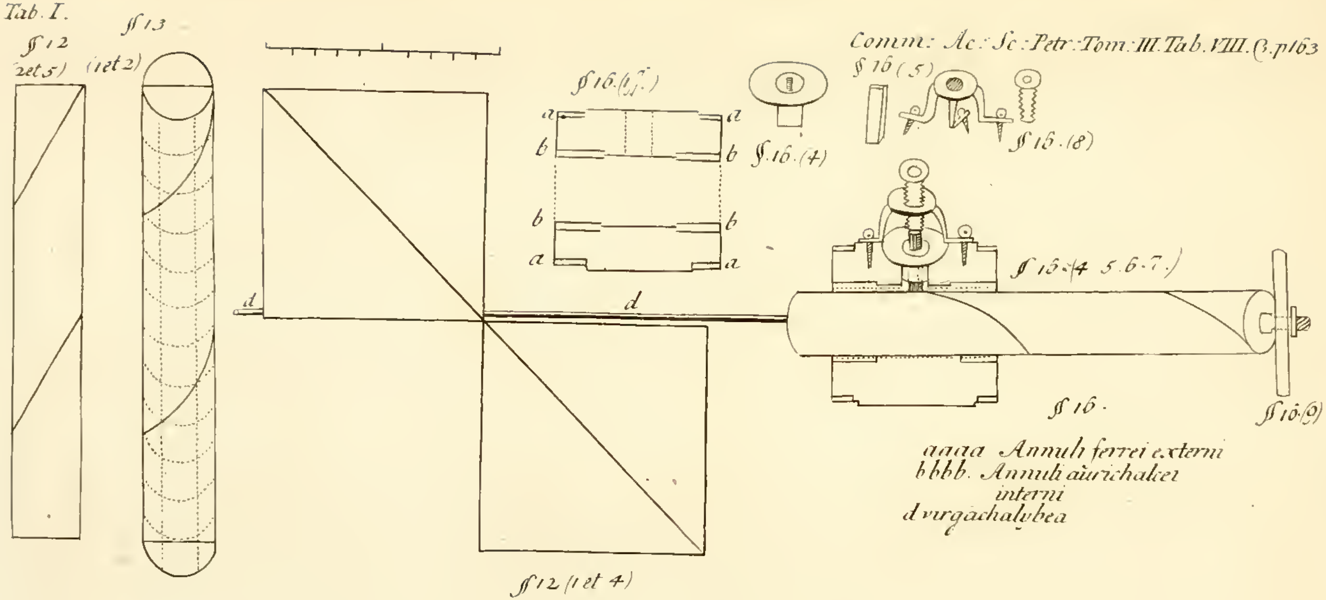


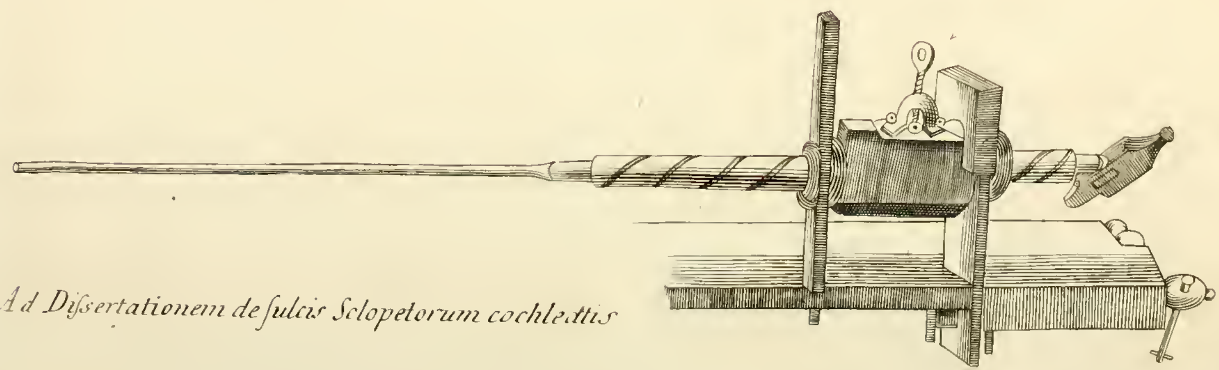
aaaa Annuli ferrei externi
bbbb. Annuli aurichalcei interni
d virga chalybea



Tab. I.

Comm: Ac: Sc: Petr: Tom: III. Tab. VIII. (3. p163





Ad Diſsertationem de ſulcis Sclopetorum cochleatis

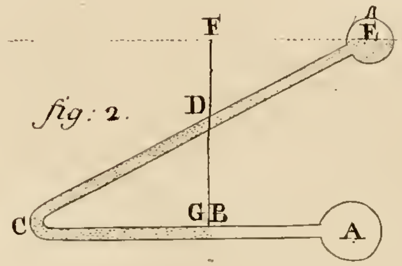


fig: 2.

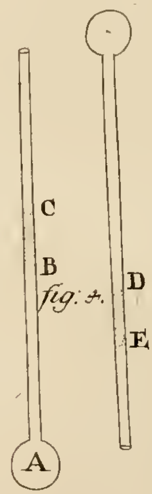
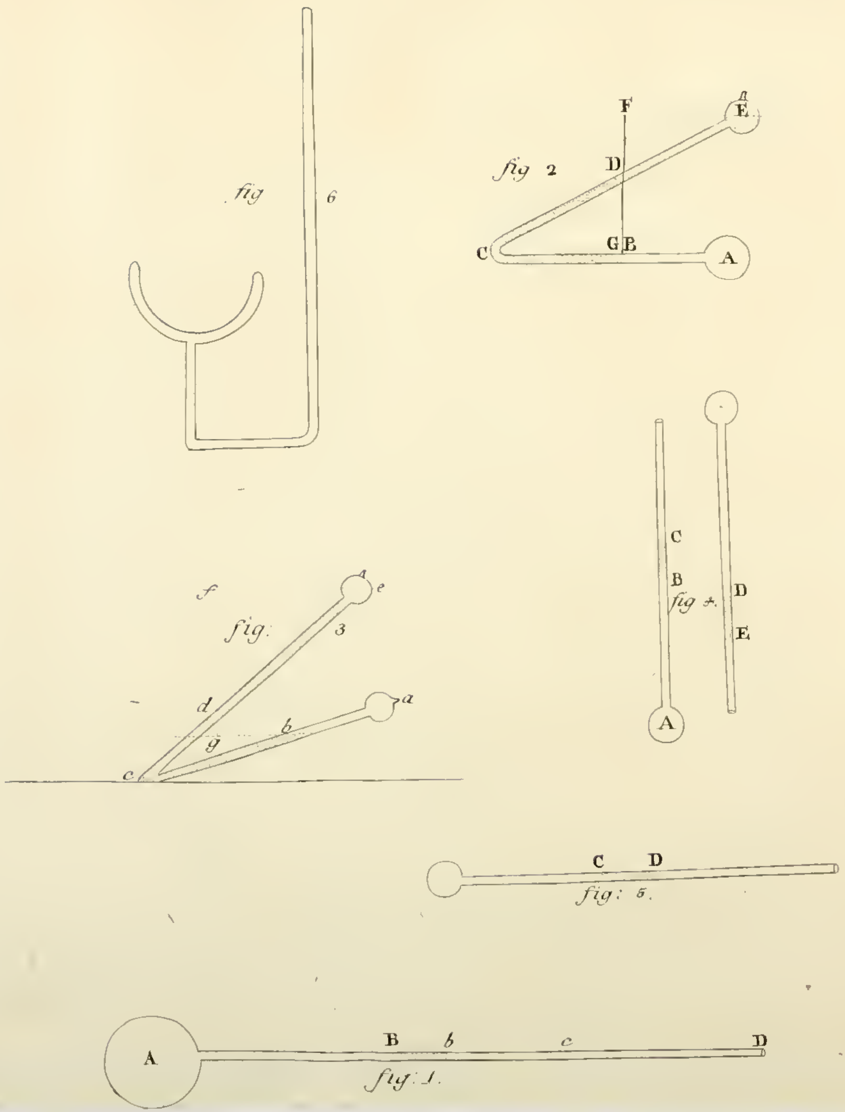


fig: 4.



fig: 5.


fig 6
fig 2
F
E
D
C
G B
A
fig 3
f
e
d
a
b
g
c
C
B
fig 4.
D
E
A
C D
fig: 5.
A
B b c D
fig: 1.

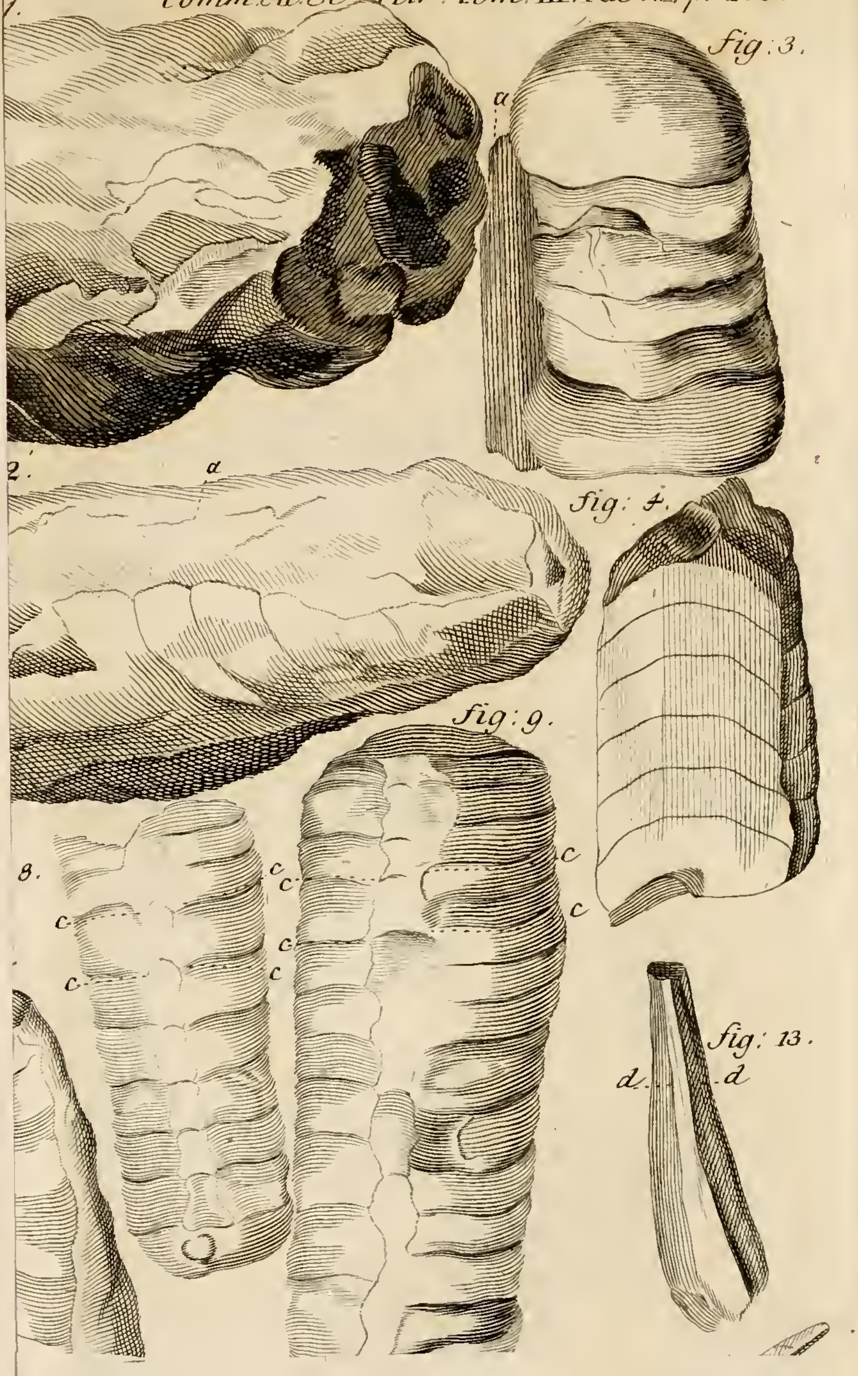

1.
fig: 3.
a
2.
d
fig: 4.
fig: 9.
8.
c
c
c
c
c
c
c
c
fig: 13.
d
d


fig 1.
fig 3.
fig. 2.
fig 4.
fig. 9
fig 5.
fig 6.
fig 8.
fig. 7.
fig 10.
fig. 13.
fig 15.
fig 12.
fig 11
fig. 14

Fig: 17.

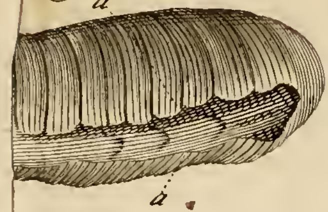
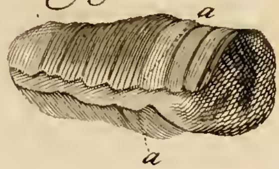


Fig: 18



20.

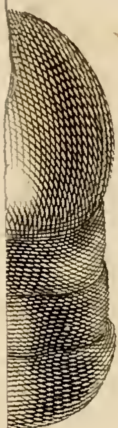


Fig: 21.

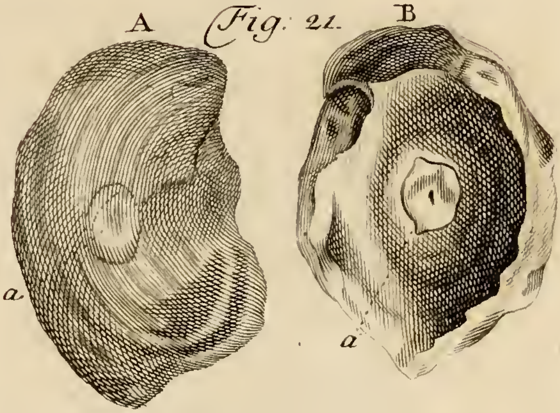


Fig: 23.

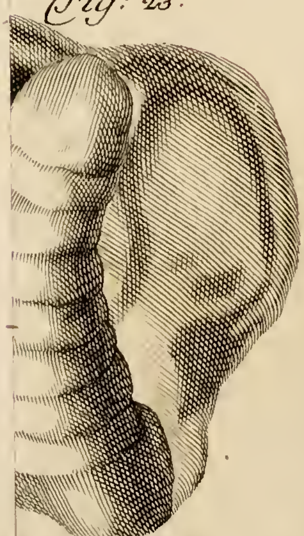


Fig: 24.

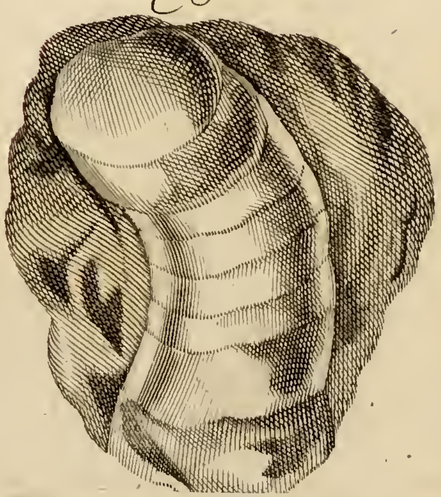



Fig 16
Fig. 17.
Fig 18
Fig: 19
Fig: 20.
Fig 21.
Fig: 22.
Fig: 23.
Fig: 24
Fig: 25
Fig 26


Fig: 2.
Fig: 4.
Fig: 3
Fig: 6.


Fig 1.
Fig: 2
Fig 3
Fig 4
Fig: 5.
Fig: 6.

Fig: 1.





Fig: 3.





Fig. 1.

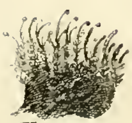
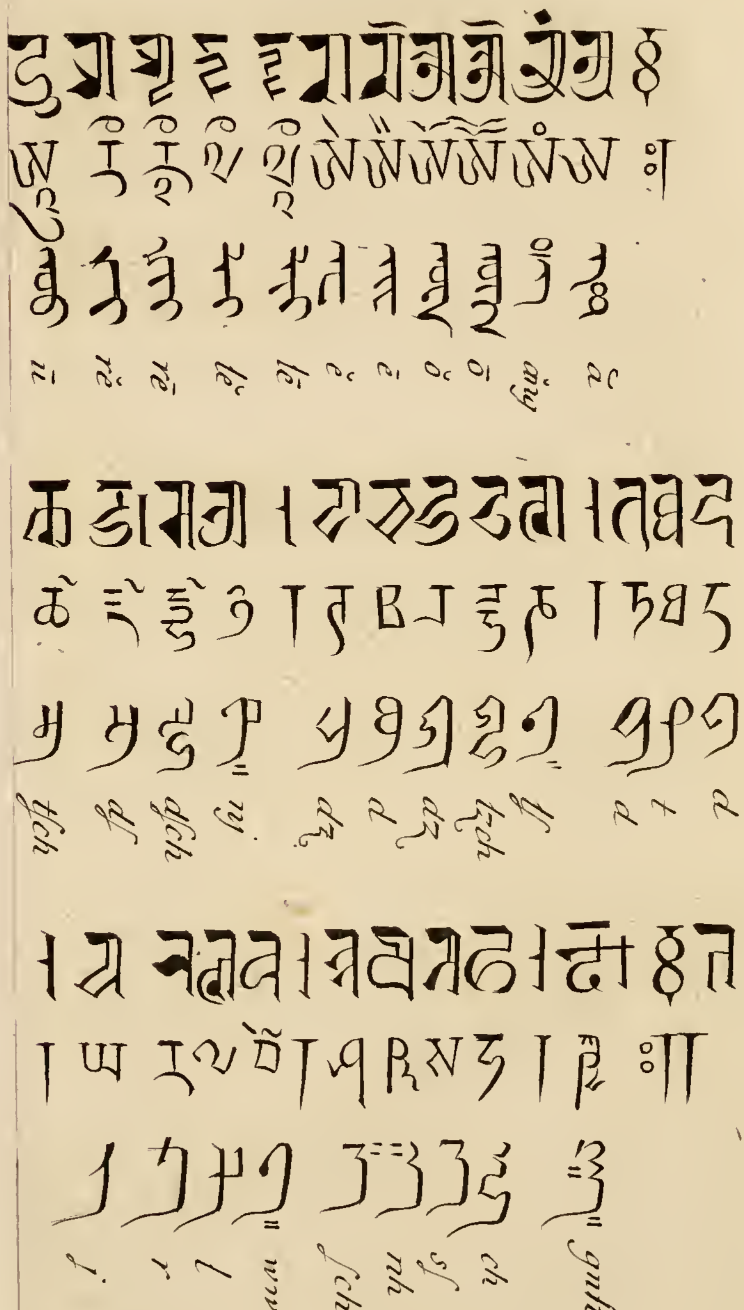
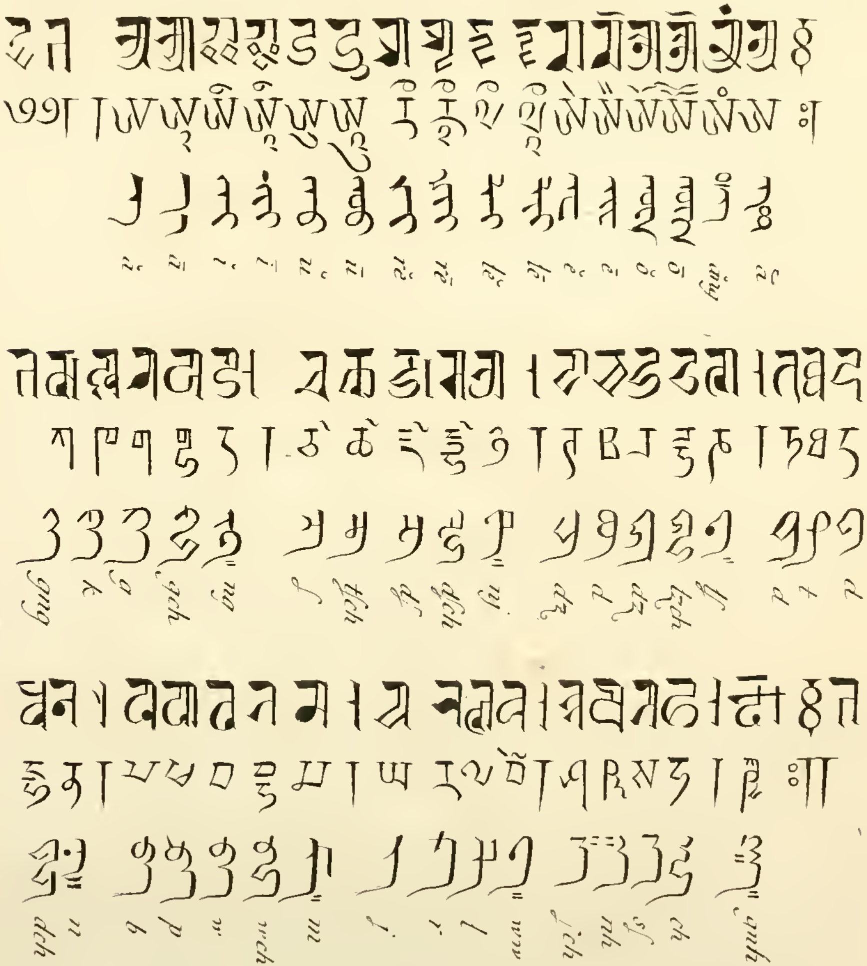


Fig 2.

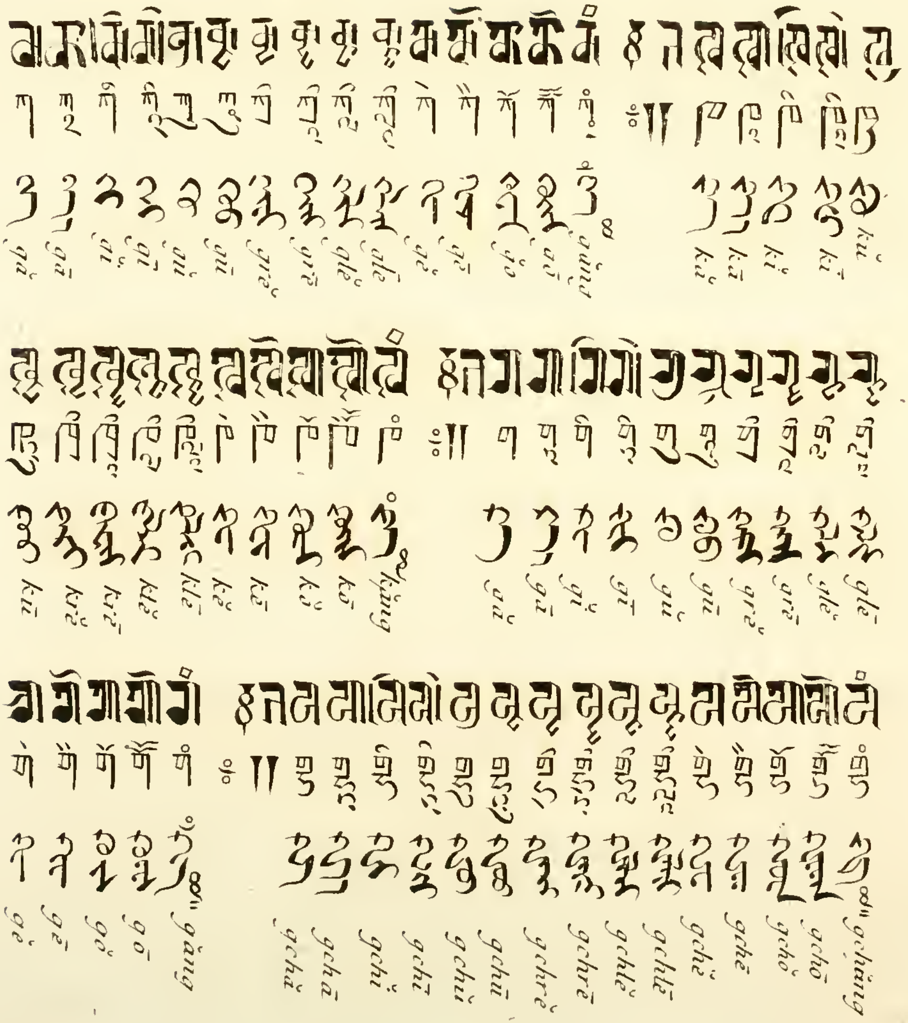


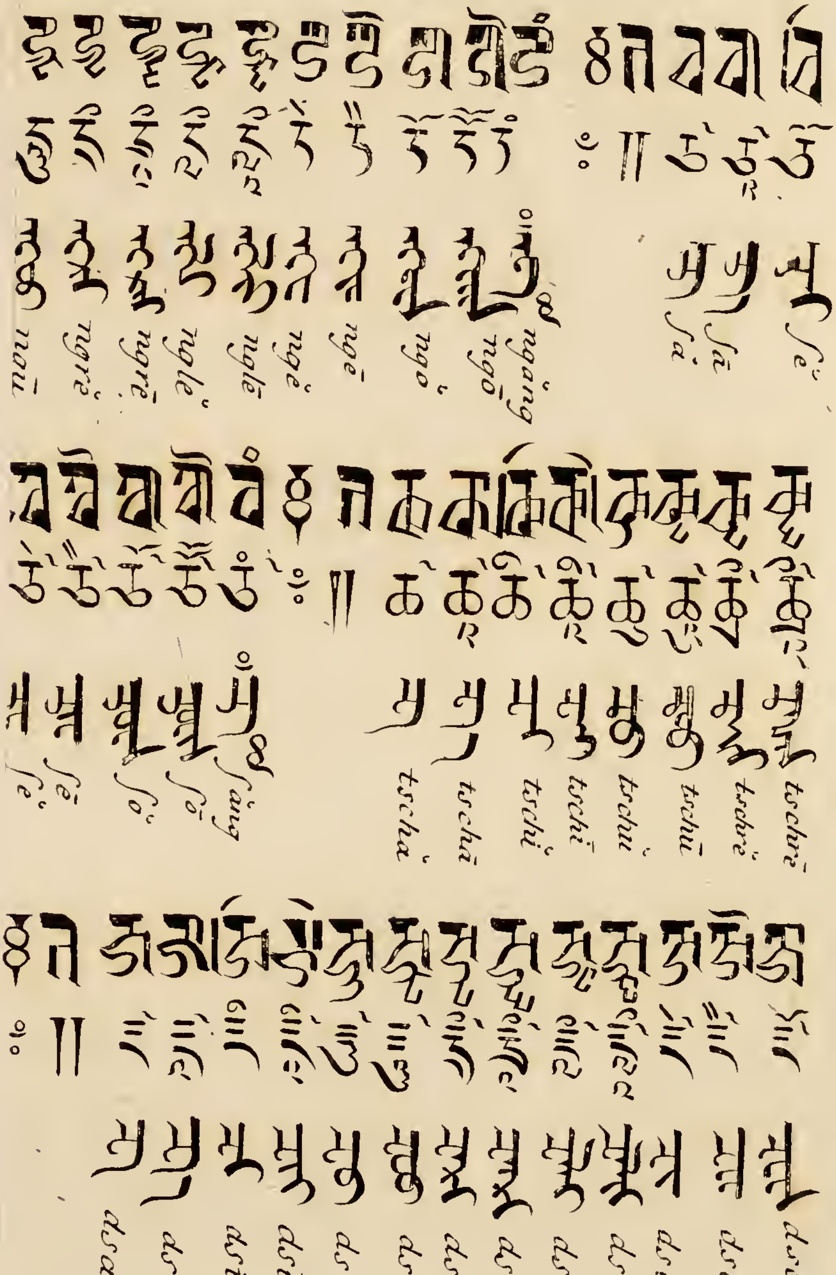
Fig. 3.



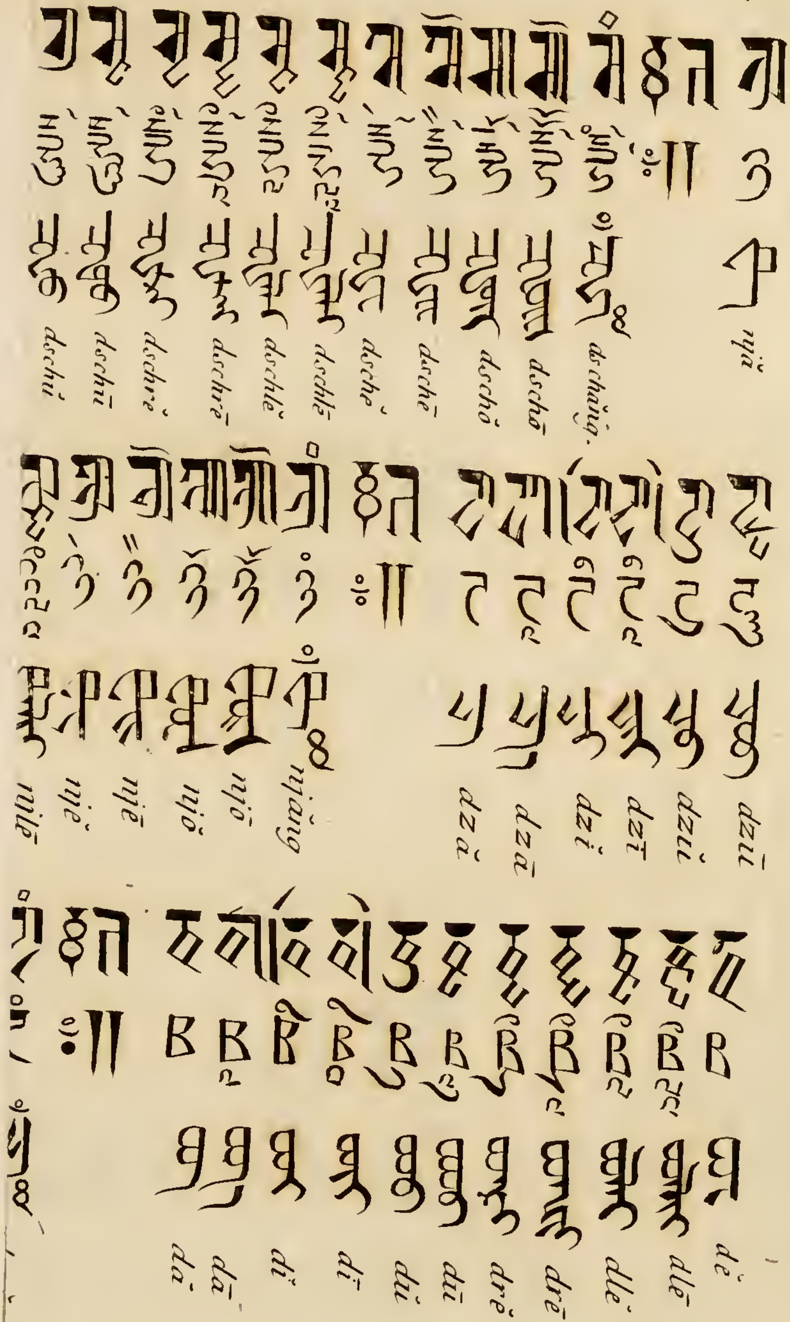


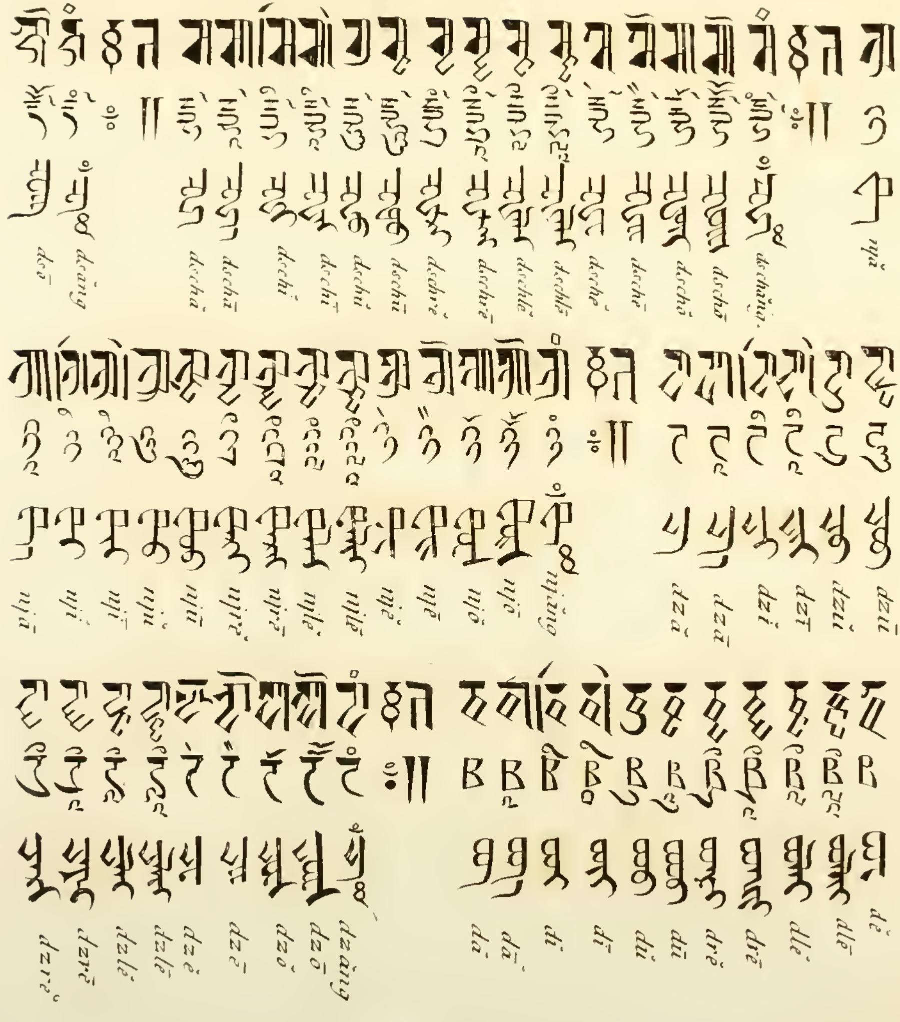


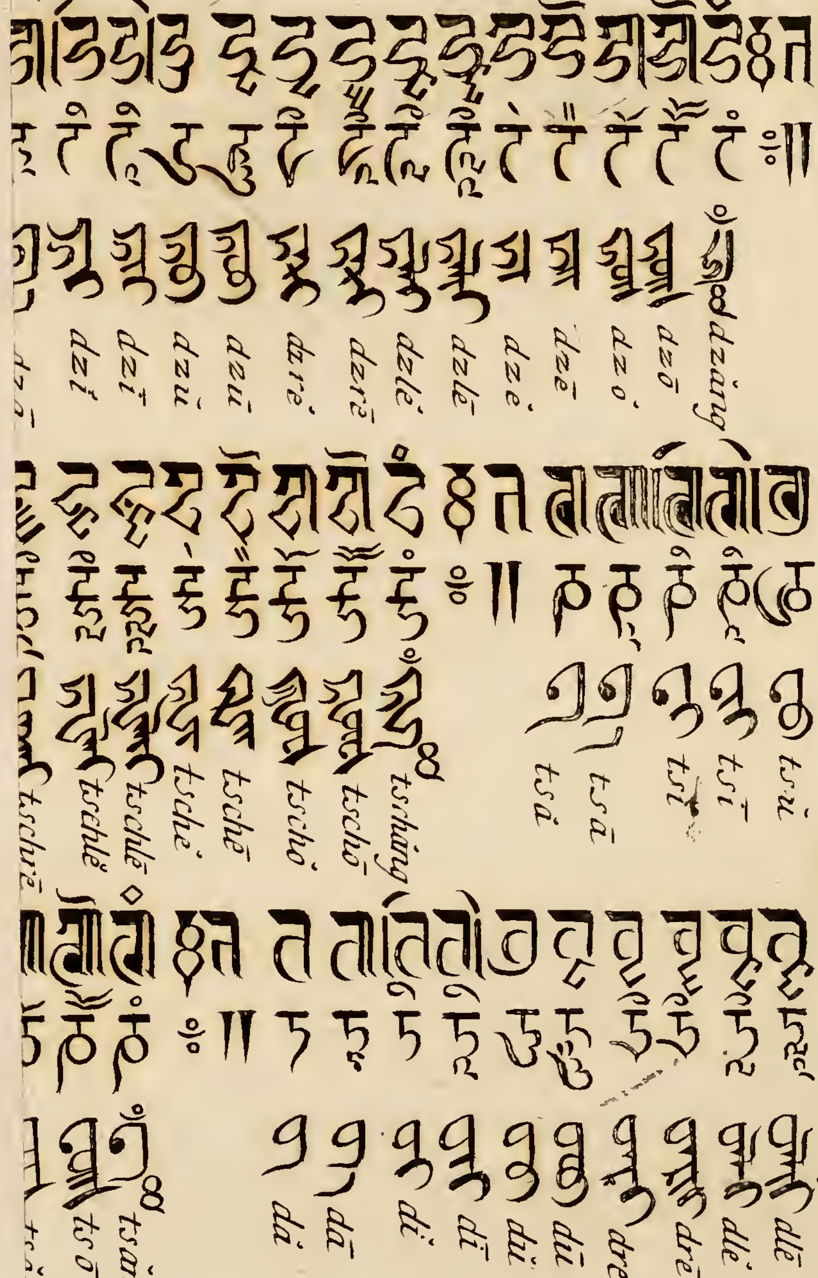


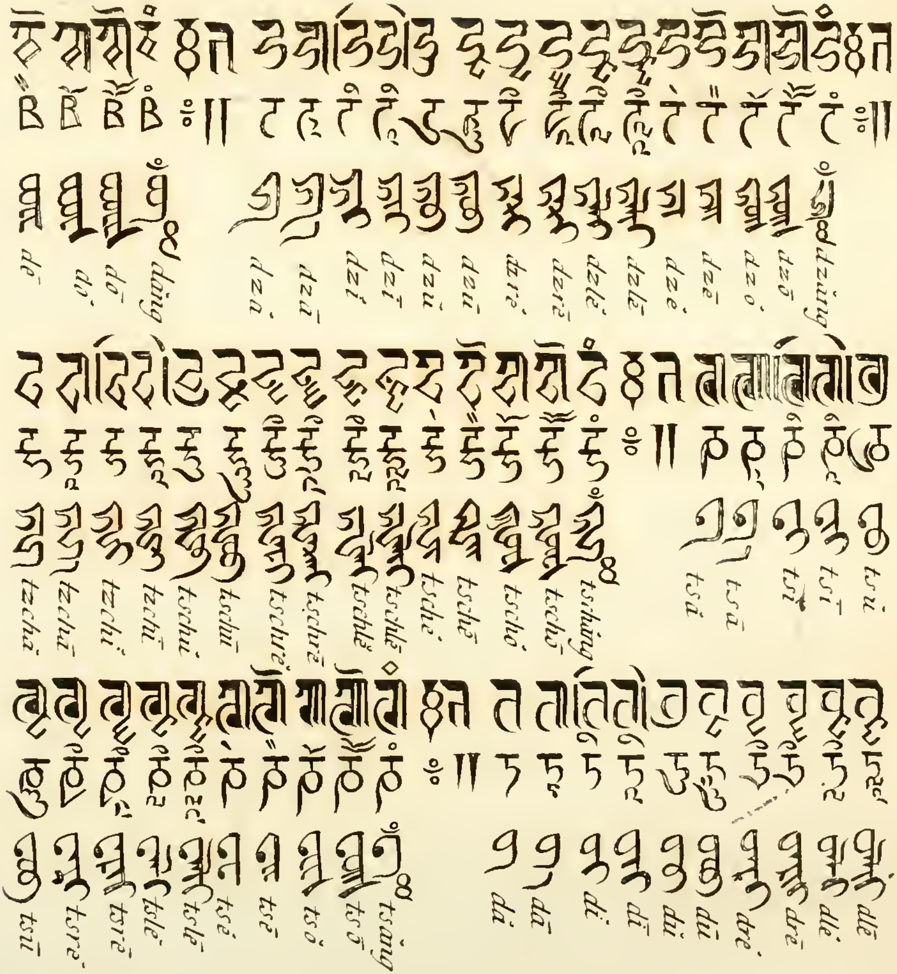

nou ngrĕ ngrē nglĕ nglē ngĕ ngē ngŏ ngō ngăng
ſă ſā ſĕ
ſĕ ſē ſŏ ſō ſăng
tschă tschā tschĭ tschī tschŭ tschū tschrĕ tschrē
dsă dsā dsĭ dsī dsŭ dsū dsrĕ dsrē dslĕ dslē dsĕ dsē dsŏ

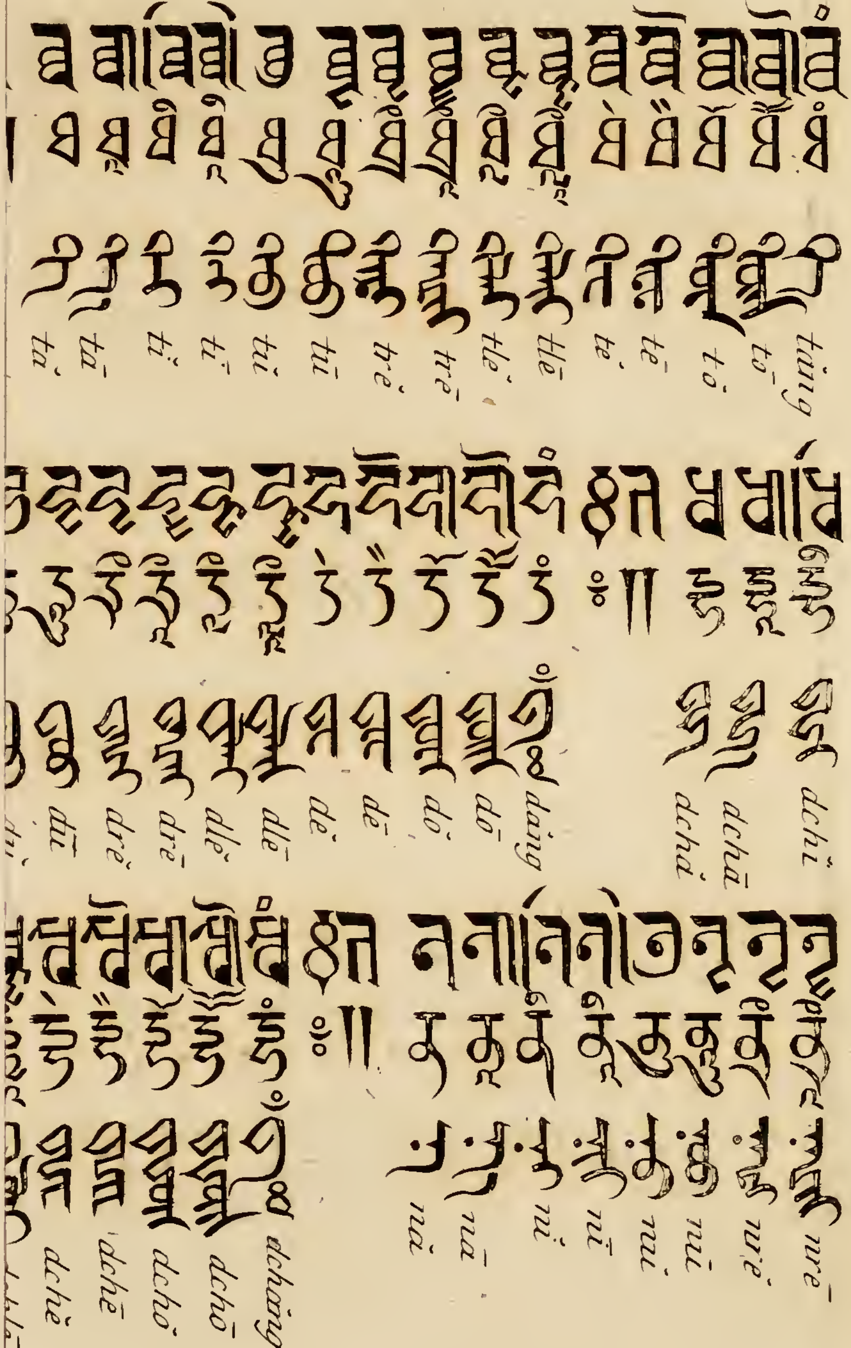


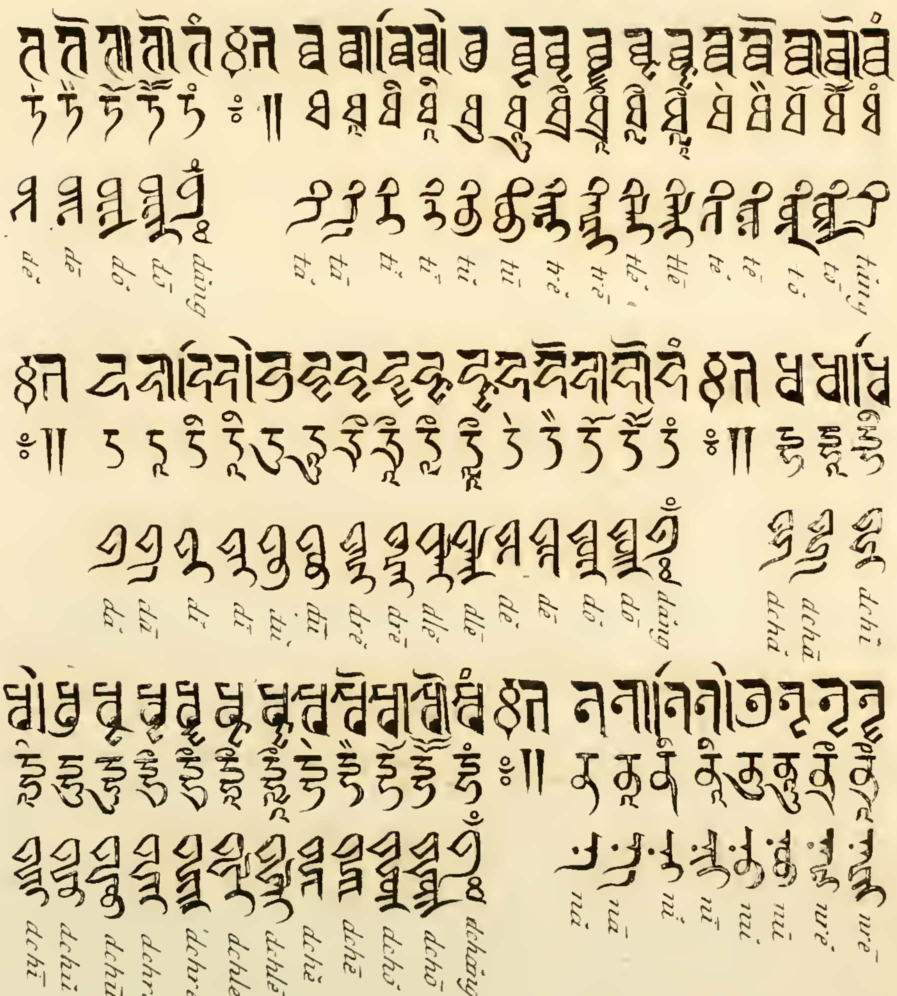

dschŭ
dschū
dschrĕ
dschrē
dschlĕ
dschlē
dschĕ
dschē
dschŏ
dschō
dschang.
nyă
nilō
nijĕ
nijē
nijŏ
nijō
nijang
dză
dzā
dzĭ
dzī
dzŭ
dzū
dă
dā
dĭ
dī
dŭ
dū
drĕ
drē
dlĕ
dlē
dĕ

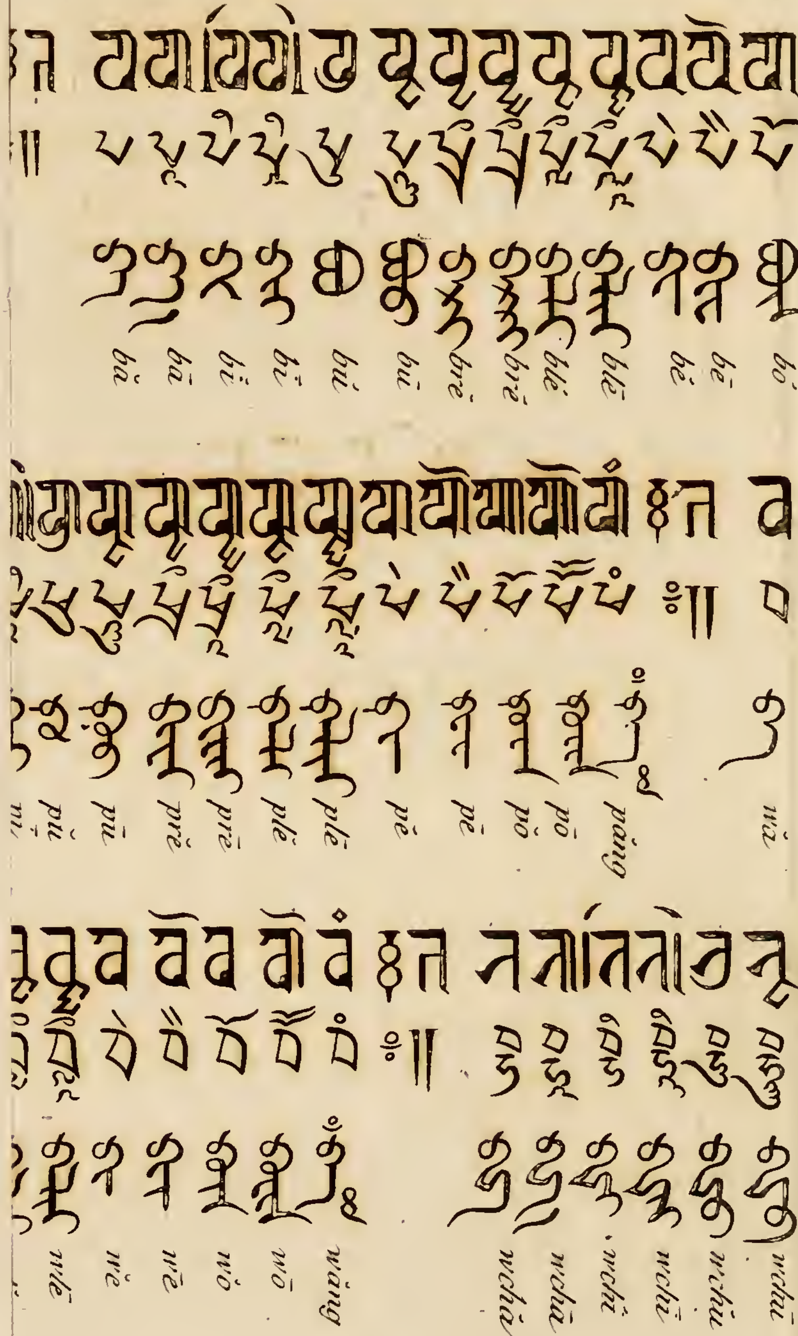

dcō
dzàng
dschà
dschā
dschì
dschī
dschù
dschū
dschrè
dschrē
dschlè
dschlē
dschè
dschē
dschò
dschō
dschàng.
njă
njà
njì
njī
njù
njū
njrè
njrē
njlè
njlē
njè
njē
njò
njō
njàng
dzà
dzā
dzì
dzī
dzù
dzū
dzrè
dzrē
dzlè
dzlē
dzè
dzē
dzò
dzō
dzàng
dà
dā
dì
dī
dù
dū
drè
drē
dlè
dlē
dè

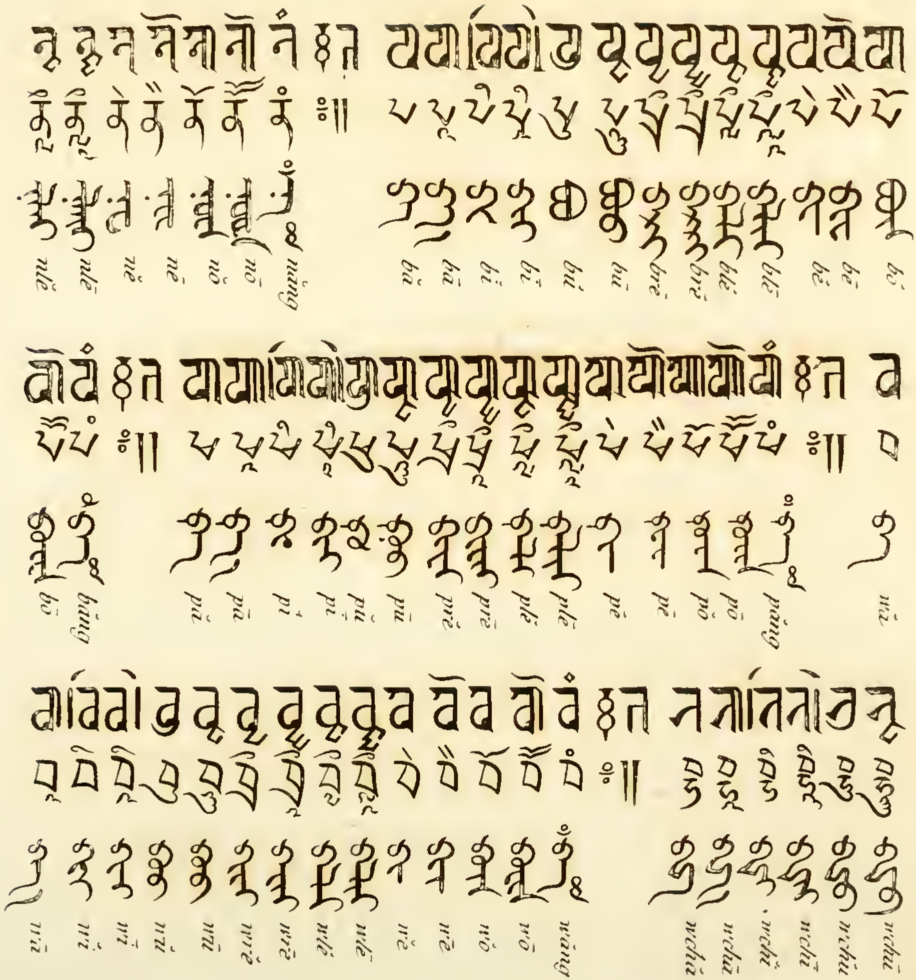

dzī
dzi
dzu
dzū
dzre
dzrē
dzlé
dzlē
dzé
dzē
dzó
dzō
dzang
tschrē
tschlē
tschlé
tsché
tschē
tschó
tschō
tschang
tsá
tsā
tsī
tsu
tsō
tsang
dá
dā
dí
dī
dú
dū
dre
drē
dlé
dlē

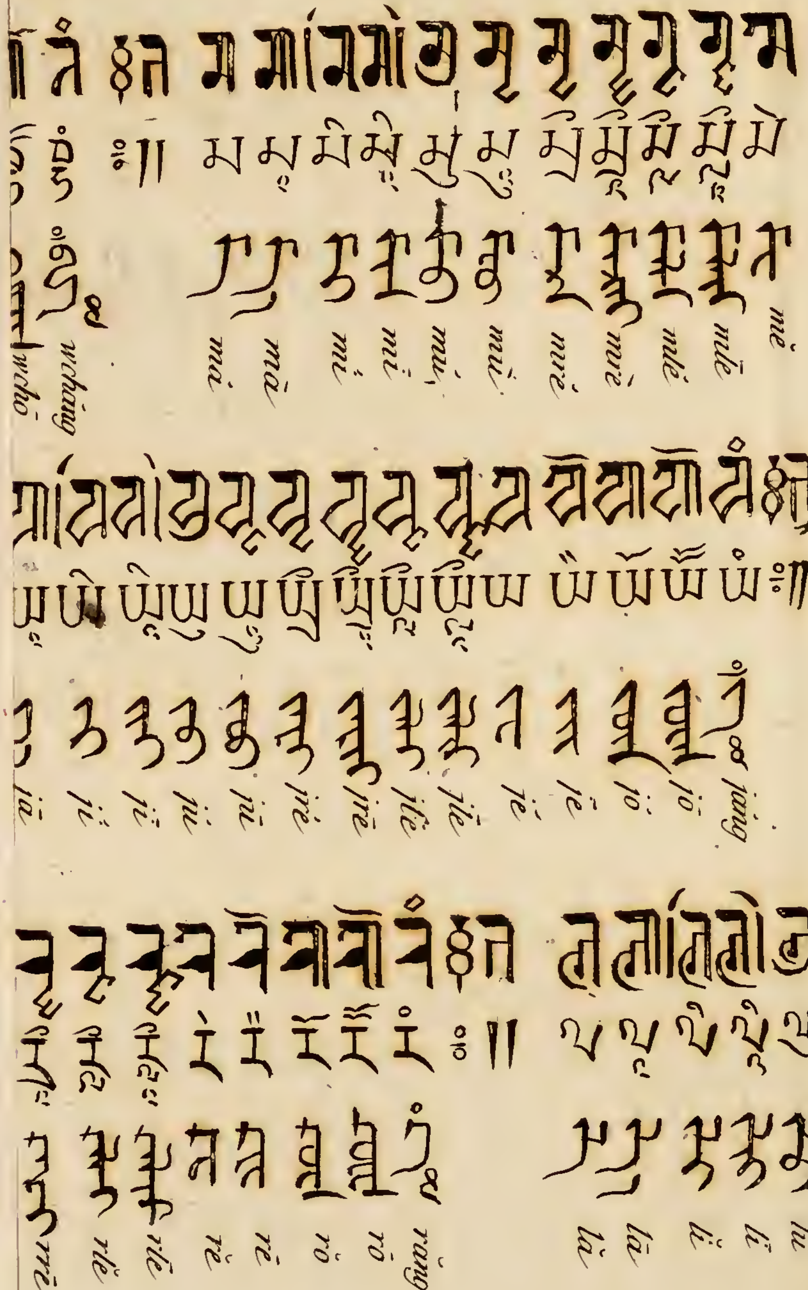

dĕ dó dō dáing
dzá dzā dzí dzī dzú dzū dzré dzrē dzlé dzlē dzé dzē dzó dzō dzáing
tzchá tzchā tzchí tzchī tschú tschū tschré tschrē tschlé tschlē tsché tschē tschó tschō tsháing
tsá tsā tsí tsī tsú
tsū tsré tsrē tslé tslē tsé tsē tsó tsō tsáing
dá dā dí dī dú dū dré drē dlé dlē


tá tā tí tī tú tū trè trē tlé tlē tè tē tó tō tàng
dū drè drē dlè dlē dè dē dò dō dàng dchā dchá dchí
dchē dchè dchó dchō dchàng ná nā ní nī nú nū nè nē

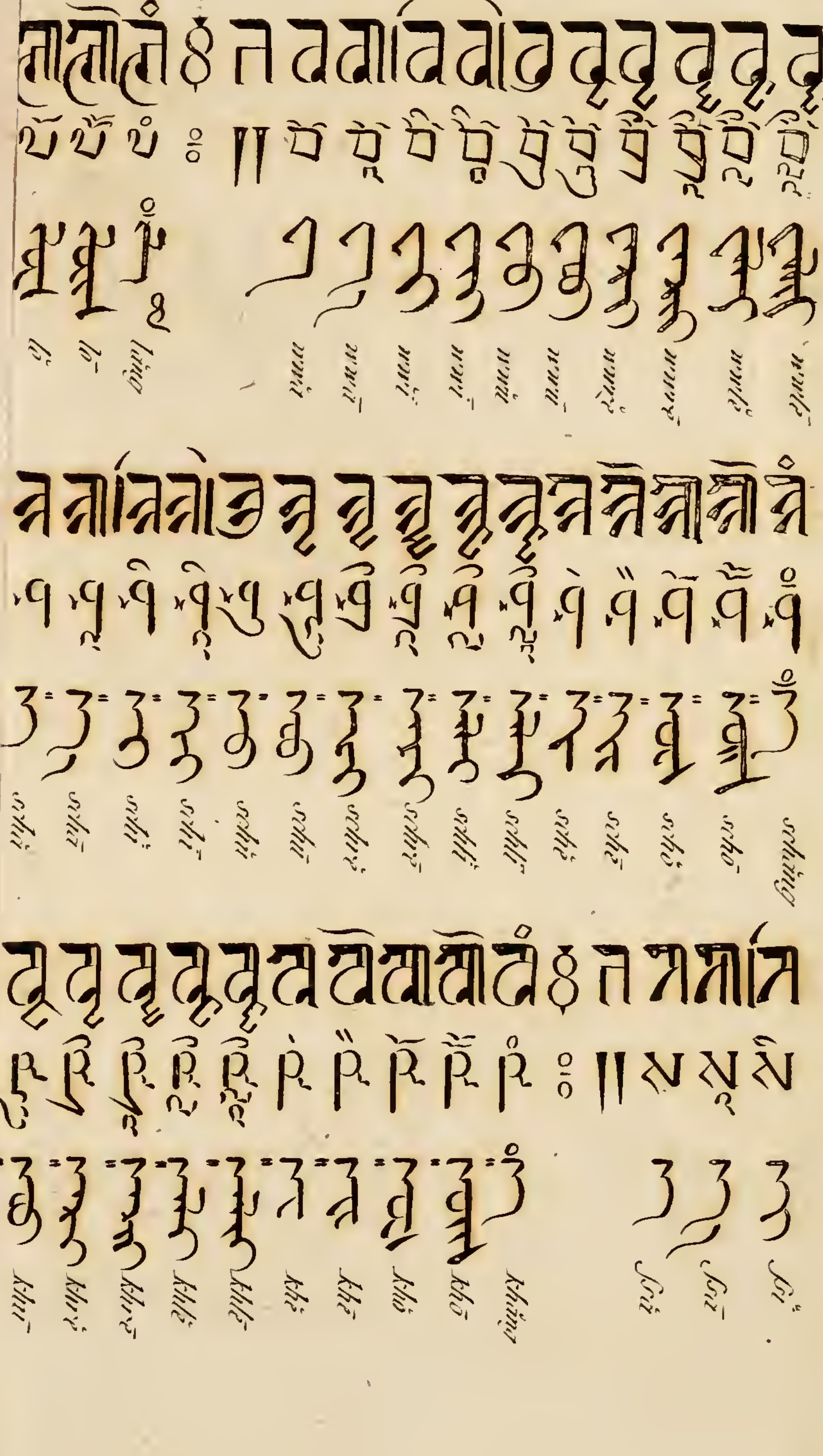

dé dē dó dō daing
tá tā tí tī tú tū tré trē tlé tlē té tē tó tō taing
dá dā dí dī dú dū dré drē dlé dlē dé dē dó dō daing
dchá dchā dchí
dchī dchú dchū dchré dchrē dchlé dchlē dché dchē dchó dchō dchaing
ná nā ní nī nú nū nré nrē

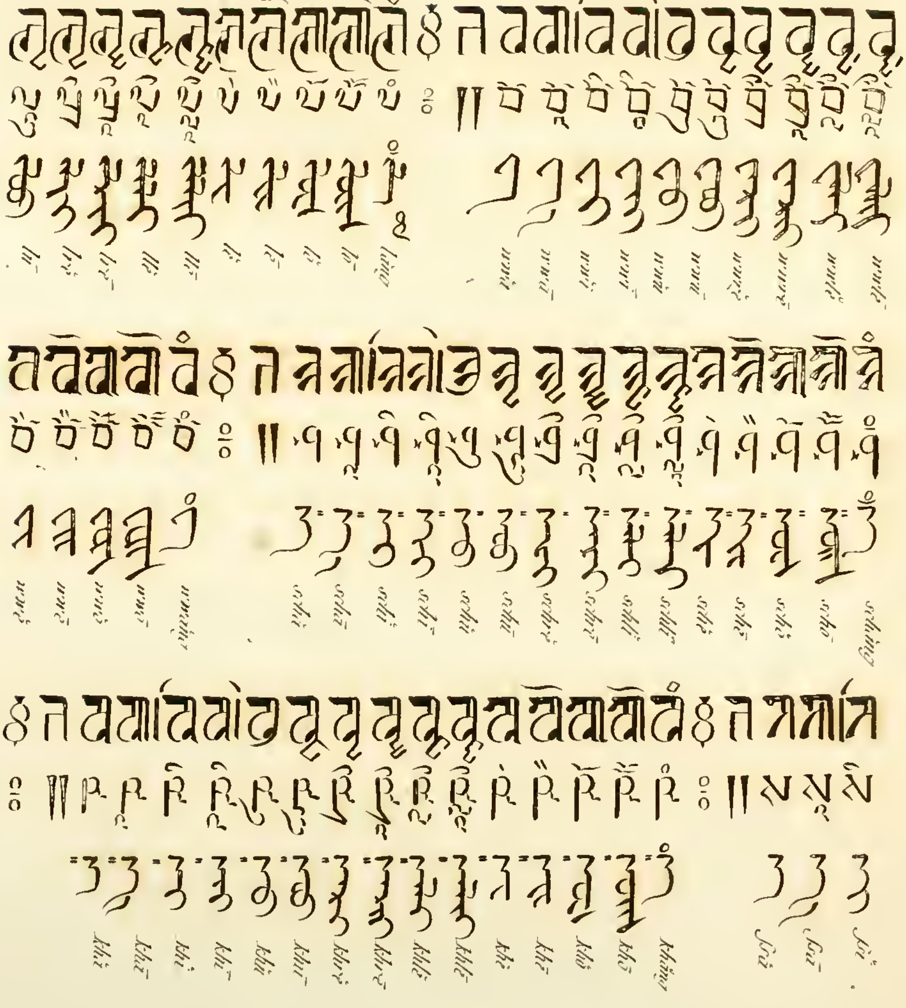

bă
bā
bĭ
bī
bŭ
bū
brĕ
brē
blĕ
blē
bĕ
bē
bó
pŭ
pū
prĕ
prē
plĕ
plē
pĕ
pē
pŏ
pō
pŏng
wă
wlē
wĕ
wē
wŏ
wō
wŏng
wchă
wchā
wchĭ
wchī
wchŭ
wchū

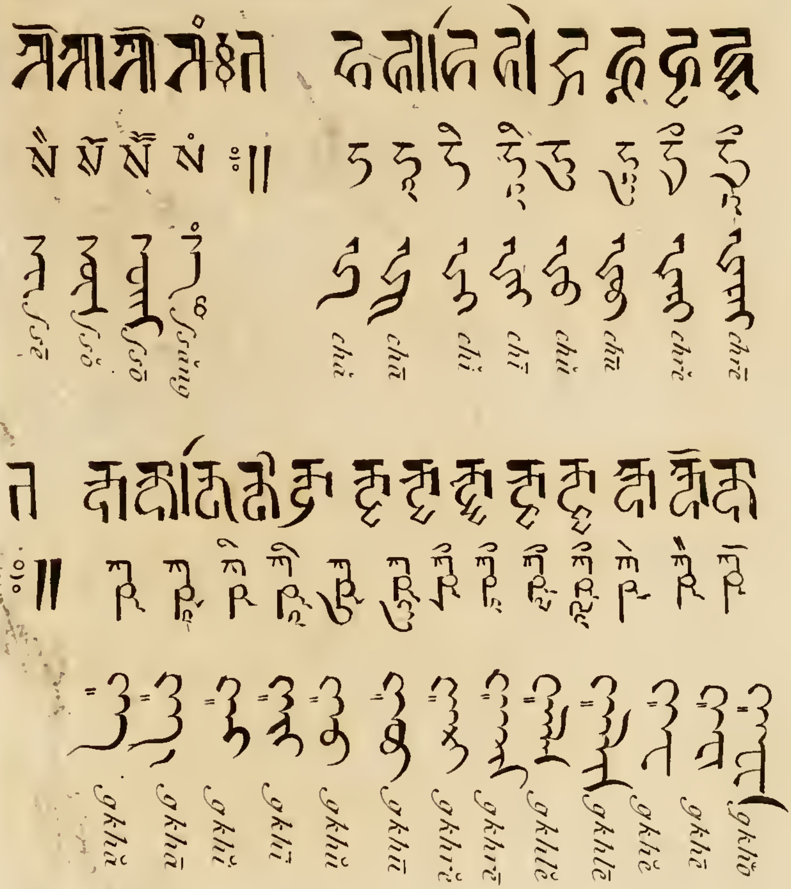



wchó
wcháng
má
mà
mí
mì
mú
mù
mvè
mvè
mlé
mlē
mé
lá
lí
lì
lú
lù
lrè
lrè
llé
llē
lé
lē
ló
lò
láng
rrè
rlé
rlē
rè
rē
ró
rò
ráng
lá
là
lí
lì
lú








ſsē
ſsŏ
ſsō
ſsing
chŭ
chū
chĭ
chī
chŭ
chū
chrĕ
chrē
gkhă
gkhā
gkhĭ
gkhī
gkhŭ
gkhū
gkhrĕ
gkhrē
gkhlĕ
gkhlē
gkhĕ
gkhē
gkhŏ




ſsi ſsü ſsū ſsrï ſsrī ſsli ſslī ſsé ſsē ſsò ſsō ſsàng
chà chā chì chī chù chū chrì chrī
chlĕ chlē chè chē chò chō chàng
gkhà gkhā gkhì gkhī gkhù gkhū gkhrì gkhrī gkhlĕ gkhlē gkhĕ gkhē gkhŏ
gkhō gkhàng

AMNH LIBRARY
100127242